VEKTORIANALYYSI
2. välikoe / 2. exam
10.12.2012

1. Laske käyräintegraali $\int_\gamma F \cdot d\bar{s}$, kun $F(x,y) = (x, y^2)$ ja $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ on paraabelin $x = 3y^2$ kaari, alkupisteenä $(0,0)$ ja loppupisteenä $(3,1)$.

2. Laske integraali $\int_D f dx_1 dx_2$, kun $f : D \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) := x_2^2 x_1 + x_1^3$ ja $D := \{\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \|\bar{x}\| < 5, \; x_2 > 0\}$

3. a) Olkoon $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$ vektorikenttä, jolle molemmat $F_j \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia funktioita. Miten määritellään F:n eksaktisuus? Esitä (ilman todistusta) yleinen välttämätön ehto eksaktisuudelle, joka perustuu kahden muuttujan funktion derivoimisjärjestyksen vaihdannaisuuteen (max. 2 pistettä).
b) Määrää vakio $A \in \mathbb{R}$ siten, että vektorikentästä $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \big(Axy\sin(x^2y), x^2\sin(x^2y) + y^2\big)$$

tulee eksakti. Etsi sen jälkeen jokin F:n potentiaali käyttäen mitä tahansa luennoilla tai laskuharjoituksissa mainittua keinoa (max. 4 pistettä).

4. Laske $\int_S (\nabla \times F) \cdot d\bar{S}$, kun $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on vektorikenttä

$$F(x,y,z) := \big(- 10x^3 e^{-5z^2}, 10y^3\cos(yz), \cos(x+y)\sin(yz)\big),$$

ja pinta S on puolipallon kuori $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; z \geq 0\}$, normaalivektori ylöspäin.

****

1. Calculate the line integral $\int_\gamma F \cdot d\bar{s}$, for $F(x,y) = (x, y^2)$, and the arc of the parabola $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $x = 3y^2$, starting from $(0,0)$ and ending at $(3,1)$.

2. Calculate the integral $\int_D f dx_1 dx_2$, given $f : D \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) := x_2^2 x_1 + x_1^3$ and $D := \{\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \|\bar{x}\| < 5, \; x_2 > 0\}$

3. a) Let $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$ be a vector field such that both $F_j \to \mathbb{R}$ are continuously differentiable functions. How do you define the exactness of F? Give (without proof) a general necessary condition for the exactness, which is based on the commutativity of partial differentiation of 2 variable functions (max. 2 points).
b) Find a constant $A \in \mathbb{R}$ making the vector field $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \big(Axy\sin(x^2y), x^2\sin(x^2y) + y^2\big)$$

exact. Then find a potential of F using any method mentioned in the lectures or exercise problems (max. 4 points).

4. Calculate $\int_S (\nabla \times F) \cdot d\bar{S}$, when $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is the vector field

$$F(x,y,z) := \big(- 10x^3 e^{-5z^2}, 10y^3\cos(yz), \cos(x+y)\sin(yz)\big),$$

and the surface S is the hemisphere $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; z \geq 0\}$ with normal vector pointing upwards.