

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Helsingin yliopisto

Kokeessa saa olla mukana vain kynät, kumi ja viivoitin.
Elektroniset laitteet ja taulukkokirja eivät ole sallittuja.

VEKTORIANALYYSI I
21.10.2019

0.1. Tehtävä. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{kun } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{kun } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Etsi funktion f suuntaisderivaatat origossa $\partial_a f(0, 0)$ jokaiseen suuntaan $a = (a_1, a_2)$, kun $\|a\| = 1$. Osoita, että f ei ole jatkuva origossa.

0.2. Tehtävä. (1) Etsi osittaisderivaatta $\partial f / \partial x$, kun

$$(a) \quad f(x, y) = x^3 y + e^{xy^2}, \quad (b) \quad f(x, y) = x \sin\left(\frac{x}{1+y^2}\right).$$

(2) Tutki, onko funktiolla

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 x_2$$

lokaaleja ääriarvopisteitä. Jos niitä on, niin etsi lokaalit ääriarvot.

0.3. Tehtävä. Osoita, että kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \sin(x_2) + x_3^2, \cos(x_1) + x_3^3, x_1 x_2 x_3)$$

on differentioituva.

Etsi (vektori)osittaisderivaatta $\partial_1 f$.

Määrä kuvauksen f Jacobin matriisi.

0.4. Tehtävä. Olkoon

$$(1) \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x) = (x_1, x_1 x_2, x_2)$$

$$(2) \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \|x\|^2$$

$$(3) \quad h := gf : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Osoita, että h on differentioituva. Etsi derivaatta $Dh(x_0)$ pisteessä $x_0 = (1, -1)$.