

Department of Mathematics and Statistics
Topology II
2nd midterm exam 17.12.2019

1. Here τ_1 and τ_2 are topologies in a set X . Are the following claims true? Justify each of your answers by giving a proof or a counterexample.
 - a) If the space (X, τ_1) is compact and $\tau_1 \subset \tau_2$, then the space (X, τ_2) is compact.
 - b) If the space (X, τ_1) is compact and $\tau_2 \subset \tau_1$, then the space (X, τ_2) is compact.
 - c) If the space (X, τ_1) is separable and $\tau_1 \subset \tau_2$, then the space (X, τ_2) is separable.
 - d) If the space (X, τ_1) is separable and $\tau_2 \subset \tau_1$, then the space (X, τ_2) is separable.
2.
 - a) Prove that every closed subspace of a Lindelöf space is Lindelöf.
 - b) Prove that every subspace of a regular space is regular.
3.
 - a) Prove directly from the definitions, that a compact subspace of a Hausdorff space is closed. (4 p.)
 - b) Give an example which shows that the claim in item a) doesn't hold without the "Hausdorff" assumption. (2 p.)
4. Formulate and prove the Baire theorem for complete metric spaces.

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Topologia II

2. kurssikoe 17.12.2019

1. Seuraavassa τ_1 ja τ_2 ovat topologioita joukossa X . Ovatko seuraavat väitteet tosia? Perusteluksi todistus tai vastaesimerkki.

a) Jos avaruus (X, τ_1) on kompakti ja $\tau_1 \subset \tau_2$, niin avaruus (X, τ_2) on kompakti.

b) Jos avaruus (X, τ_1) on kompakti ja $\tau_2 \subset \tau_1$, niin avaruus (X, τ_2) on kompakti.

c) Jos avaruus (X, τ_1) on separoituva ja $\tau_1 \subset \tau_2$, niin avaruus (X, τ_2) on separoituva.

d) Jos avaruus (X, τ_1) on separoituva ja $\tau_2 \subset \tau_1$, niin avaruus (X, τ_2) on separoituva.

2. a) Osoita, että Lindelöf-avaruuden jokainen suljettu aliavaruus on Lindelöf.

b) Osoita, että säännöllisen avaruuden jokainen aliavaruus on säännöllinen.

3. a) Osoita määritelmistä lähtien, että Hausdorff-avaruuden kompakti osajoukko on suljettu. (4 p.)

b) Anna esimerkki, joka osoittaa, että a)-kohdan väite ei päde ilman "Hausdorff"-oletusta. (2 p.)

4. Muotoile ja todista Bairen lause täydellisille metrisille avaruuksille.