Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia II
2. kurssikoe 15.12.2017

1. Seuraavassa τ_1 ja τ_2 ovat topologioita joukossa X. Ovatko seuraavat väitteet tosia? Perusteluksi todistus tai vastaesimerkki.

a) Jos avaruus (X, τ_1) on yhtenäinen ja $\tau_1 \subset \tau_2$, niin avaruus (X, τ_2) on yhtenäinen.

b) Jos avaruus (X, τ_1) on yhtenäinen ja $\tau_2 \subset \tau_1$, niin avaruus (X, τ_2) on yhtenäinen.

c) Jos avaruus (X, τ_1) on lokaalisti kompakti ja $\tau_1 \subset \tau_2$, niin avaruus (X, τ_2) on lokaalisti kompakti.

d) Jos avaruus (X, τ_1) on lokaalisti kompakti ja $\tau_2 \subset \tau_1$, niin avaruus (X, τ_2) on lokaalisti kompakti.

2. Oletetaan, että topologinen avaruus X on Hausdorff ja sillä on seuraava ominaisuus: aina kun $a \in U \Subset X$, niin on olemassa jatkuva kuvaus $f \colon X \to [0, 1]$ siten, että $f(a) = 1$ ja $f(x) = 0$ kaikilla $x \in X \setminus U$. Osoita, että X on säännöllinen.

3. Osoita määritelmistä lähtien, että Hausdorff-avaruuden kompakti osajoukko on suljettu.

4. Muotoile ja todista Bairen lause täydellisille metrisille avaruuksille.

Department of Mathematics and Statistics
Topology II
2nd midterm exam 15.12.2017

1. Here τ_1 and τ_2 are topologies in a set X. Are the following claims true or false? Justify each of your answers by giving a proof or a counterexample.

a) If the space (X, τ_1) is connected and $\tau_1 \subset \tau_2$, then the space (X, τ_2) is connected.

b) If the space (X, τ_1) is connected and $\tau_2 \subset \tau_1$, then the space (X, τ_2) is connected.

c) If the space (X, τ_1) is locally compact and $\tau_1 \subset \tau_2$, then the space (X, τ_2) is locally compact.

d) If the space (X, τ_1) is locally compact and $\tau_2 \subset \tau_1$, then the space (X, τ_2) is locally compact.

2. Suppose, that a topological space X is Hausdorff and it has the following property: whenever $a \in U \Subset X$, then there exists a continuous map $f \colon X \to [0,1]$, such that $f(a) = 1$ and $f(x) = 0$ for all $x \in X \setminus U$. Prove, that X is regular.

3. Prove directly from the definitions, that a compact subspace of a Hausdorff space is closed.

4. Formulate and prove the Baire theorem for complete metric spaces.