Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia II
1. kurssikoe 24.10.2017

1. a) Osoita, että Hausdorffin avaruudessa jono voi supeta enintään yhtä pistettä kohti.

b) Anna esimerkki topologisesta avaruudesta ja k.o. avaruuden jonosta, joka suppenee useampaa kuin yhtä pistettä kohti.

2. Kokoelma $(A_j)_{j \in J}$ topologisen avaruuden X osajoukkoja on *lokaalisti äärellinen*, jos jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa ympäristö U_x, jolle $U_x \cap A_j \neq \emptyset$ vain äärellisen monella indeksillä j.

a) Anna esimerkki reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ (varustettuna tavallisella topologialla) peitteestä, joka on ääretön, mutta lokaalisti äärellinen. (1 p.)

b) Anna esimerkki $\mathbb{R}$:n (varustettuna tavallisella topologialla) peitteestä, joka ei ole lokaalisti äärellinen, mutta jolla on ominaisuus: jokainen piste $x \in \mathbb{R}$ kuuluu vain äärellisen moneen peitteen joukkoon. (2 p.)

c) Osoita: Jos $(A_j)_{j \in J}$ on lokaalisti äärellinen kokoelma topologisen avaruuden X suljettuja osajoukkoja, niin niiden yhdiste $\cup_{j \in J} A_j$ on suljettu X:ssä. (3 p.)

3. Topologinen avaruus on *nollaulotteinen*, jos sen topologialla on olemassa kanta, jonka jäsenet ovat suljettuja.

a) Osoita, että jokainen diskreetillä topologialla varustettu avaruus on nollaulotteinen. (1 p.)

b) Osoita, että rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ (varustettuna tavallisella topologialla) on nollaulotteinen. (2 p.)

c) Osoita, että nollaulotteisten avaruuksien mielivaltainen tulo on nollaulotteinen. (3 p.)

4. Indusoidun topologian universaaliominaisuus.

a) Olkoon X joukko ja $(f_j)_{j \in J}$ perhe kuvauksia $f_j \colon X \to Y_j$, missä $(Y_j, \mathcal{T}_j')$ on topologinen avaruus kaikilla $j \in J$. Osoita, että perheen $(f_j)_{j \in J}$ indusoimalla topologialla $\mathcal{T}$ on seuraava ominaisuus:
Olkoon $(Z, \mathcal{T}'')$ avaruus ja $g \colon Z \to X$. Tällöin g on jatkuva, jos ja vain jos $f_j \circ g$ on jatkuva kaikilla $j \in J$.

b) Osoita, että indusoitu topologia $\mathcal{T}$ on ainoa X:n topologia, jolla on yllä mainittu ominaisuus.

Department of Mathematics and Statistics
Topology II
1st midterm exam 24.10.2017

1. a) Prove, that in a Hausdorff space, a sequence can converge to at most one point.

b) Give an example of a topological space, and a sequence (in that space), which converges to more than one point.

2. A collection $(A_j)_{j \in J}$ of subsets of a topological space X is *locally finite*, if every point $x \in X$ has a neighbourhood U_x, for which $U_x \cap A_j \neq \emptyset$ only for a finite number of indices j.

a) Give an example of a covering of the set $\mathbb{R}$ of real numbers (equipped with the usual topology), such that the covering is infinite, but locally finite. (1 p.)

b) Give an example of a covering of $\mathbb{R}$ (equipped with the usual topology), such that the covering is not locally finite, but it has the property: every point $x \in \mathbb{R}$ belongs to only finitely many sets of the covering. (2 p.)

c) Prove: If $(A_j)_{j \in J}$ is a locally finite collection of closed sets of a topological space X, then their union $\cup_{j \in J} A_j$ is closed in X. (3 p.)

3. A topological space is *zero dimensional*, if the topology has a basis, whose members are closed.

a) Prove, that every space equipped with the discrete topology is zero dimensional. (1 p.)

b) Prove that the set $\mathbb{Q}$ of rational numbers (equipped with the usual topology) is zero dimensional. (2 p.)

c) Prove, that an arbitrary product of zero dimensional spaces is zero dimensional. (3 p.)

4. The universal property of the induced topology.

a) Let X be a set and $(f_j)_{j \in J}$ a family of maps $f_j \colon X \to Y_j$, where $(Y_j, \mathcal{T}_j')$ is a topological space for all $j \in J$. Prove, that the topology $\mathcal{T}$ induced by the family $(f_j)_{j \in J}$ has the following property:
Let $(Z, \mathcal{T}'')$ be a space and $g \colon Z \to X$. Then g is continuous, if and only if $f_j \circ g$ is continuous for all $j \in J$.

b) Prove, that the induced topology $\mathcal{T}$ is the only topology of X, which has the above mentioned property.