Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia II
2. kurssikoe 11.5.2016

1. Seuraavassa τ_1 ja τ_2 ovat topologioita joukossa X. Ovatko seuraavat väitteet tosia? Perusteluksi todistus tai vastaesimerkki.

a) Jos avaruus (X, τ_1) on Hausdorff ja $\tau_1 \subset \tau_2$, niin avaruus (X, τ_2) on Hausdorff.

b) Jos avaruus (X, τ_1) on Hausdorff ja $\tau_2 \subset \tau_1$, niin avaruus (X, τ_2) on Hausdorff.

c) Jos avaruus (X, τ_1) on kompakti ja $\tau_1 \subset \tau_2$, niin avaruus (X, τ_2) on kompakti.

d) Jos avaruus (X, τ_1) on kompakti ja $\tau_2 \subset \tau_1$, niin avaruus (X, τ_2) on kompakti.

2. Osoita, että separoituva metrinen avaruus on N_2.

3. a) Osoita määritelmistä lähtien, että Hausdorffin avaruuden X jokainen kompakti osajoukko $A \subset X$ on suljettu.

b) Anna esimerkki, joka osoittaa, että oletus "Hausdorff" on tässä oleellinen.

4. Osoita, että yhtenäisten avaruuksien X ja Y tuloavaruus $X \times Y$ on yhtenäinen.
[Vihje: Todistuksessa voi käyttää n.s. "liuskoja". Jos $a \in X$, niin määritellään $A = \{(a, y) \in X \times Y \mid y \in Y\}$. Voit pitää tunnettuna, että $A \approx Y$.]

$Y = \{0\}$

$X = \mathbb{R}$ $\quad A = \{(a, y) \in X \times Y \mid y \in Y\}$

$a \in X$ $\quad = \{(a, 0)\}$