

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia Ia
Yleistentti 23.5.2018
Erilliskoe 3h30min
Sallitut apuvälineet: Ei apuvälineitä.

Näissä tehtävissä euklidisella avaruudella \mathbb{R}^n tarkoitetaan metristä avaruutta (\mathbb{R}^n, d) , missä $n \in \mathbb{N}$ ja d on euklidinen metriikka

$$d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$$

kaikilla $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

t1. (6p.) Osoita, että funktio $\|\cdot\|: \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty[$, joka on määritelty kaavalla

$$\|(x, y, z)\| = \max\{|x|, |y|\} + |z|$$

kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on normi vektoriavaruuksessa \mathbb{R}^3 .

t2. (6p.) Osoita, että euklidisen avaruuden \mathbb{R}^2 osajoukko

$$A =] - 2, 3[\times] - 1, 1[$$

on avoin.

t3. (6p.) Olkoon $A = \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Osoita, että $(0, 0) \in \overline{A}$.

t4. (6p.) (Teoriatehtävä) Osoita seuraava tulos: Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja $a \in X$. Tällöin kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on jatkuva pisteessä a , jos ja vain jos jokaisella pisteen $f(a)$ ympäristöllä U joukko $f^{-1}U$ sisältää pisteen a ympäristön.

t5. (6p.) Olkoon (X, d) metriinen avaruus ja olkoon $\{E_k \subset X : k \in \mathbb{N}\}$ sellainen kokoelma avaruuden (X, d) suljettuja osajoukkoja, että jokaisella $x \in X$ on olemassa ympäristö $U \subset X$, jolla $\{k \in \mathbb{N} : U \cap E_k \neq \emptyset\}$ on äärellinen joukko. Osoita, että yhdiste $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ on suljettu joukko.