

HY/Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesä 2017: Topologia IA
Kurssikoe (2 h 30 min)
28.6.2017

Perustelut kannattaa kirjoittaa niin tarkasti — ja niin “syvälle” — kuin ajankäyttö suinkin sallii (mutta kokonaisuus on tietysti syytä pitää mielessä).

Ole hyvä ja kirjoita eri tehtävien vastaukset eri papereille!

1. (a) Oletetaan, että (X, d) on metrinen avaruus ja x, y sen kaksi eri pistettä. Osoita, että

$$B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset,$$

kun $r = d(x, y)/2$. Mitä, jos onkin $x = y$? (4 p.)

- (b) Kun X on funktioavaruus $E = C[-1, 1]$ varustettuna sup-metriikalla sekä $f, g \in E$ ovat funktiot $x \mapsto x^2 - 1$ ja $x \mapsto 1 - x^2$, niin onko

$$B(f, 2) \cap B(g, 2) = \emptyset? \quad (2 \text{ p.})$$

2. Osoita avoimuuden määritelmää käyttäen, että joukko $U =]1, \infty[$ on avoin avaruudessa \mathbb{R} mutta joukko $\mathbb{C}U$ ei ole.

3. Osoita yksityiskohtaisesti (mutta halutessasi analyysin tietoja hyödyntäen), että joukko

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \sin x, x > 0\}$$

on suljettu puolitasossa $]0, \infty[\times \mathbb{R}$.

4. (6:12) Oletetaan, että X, Y ovat metrisiä avaruuksia ja $f, g: X \rightarrow Y$ jatkuvia kuvauksia sekä $A \subset X$ sellainen joukko, että

$$f|_A = g|_A.$$

Osoita, että myös $f|\bar{A} = g|\bar{A}$.