HY / Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Topologia Ia
Kurssikoe 7.3.2019
Sallitut apuvälineet: Ei apuvälineitä.

Näissä tehtävissä euklidisella avaruudella $\mathbb{R}^n$ tarkoitetaan metristä avaruutta $(\mathbb{R}^n, d)$, missä $n \in \mathbb{N}$ ja d on euklidinen metriikka

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2)^{1/2}$$

kaikilla $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

t1. (6p.) Olkoon $t \in]0, 1[$ ja olkoon $\|\cdot\|_t \colon \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[$ funktio, joka on määritely kaavalla

$$\|(x, y)\| = t|x| + (1 - t)|y|$$

kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että $\|\cdot\|_t$ on normi vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^2$.

t2. (6p.) Olkoon $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 < 2,\ -1 < x < 1\}$. Osoita, että A on euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ avoin joukko.

t3. (6p.) Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ x \neq 0\}$. Määritä joukon A sulkeuma $\overline{A}$ euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Perustele vastauksesi.

t4. (6p.) Olkoon $\mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R}) = \{f \colon [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on rajoitettu}\}$. Pidetään tunnettuna, että $\mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$ on vektoriavaruus ja että funktio $\|\cdot\| \colon \mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R}) \to [0, \infty[$, joka on määritelty kaavalla $\|f\| = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$ kaikilla $f \in \mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$, on normi vektoriavaruudessa $\mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$. Olkoon d normin $\|\cdot\|$ määräämä metriikka avaruudessa $\mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$. Osoita, että funktio $\Phi \colon \mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, joka on määritelty kaavalla

$$\Phi(f) = \inf_{x \in [-1,1]} f(x)$$

kaikilla $f \in \mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R})$, on jatkuva metrisestä avaruudesta $(\mathrm{raj}([-1, 1], \mathbb{R}), d)$ euklidiseen avaruuteen $\mathbb{R}$.