

Topologia IA

Kurssikoe, 06.03.2025

Apuvälineet ja lisämateriaalit eivät ole sallittuja

1. (a) Mikä on normiavaruuden määritelmä?
(b) Määritteleekö lauseke

$$|f| = \left| \int_0^1 f(x) dx \right|$$

normin välillä $[0, 1]$ jatkuvien realiarvoisten funktioiden muodostamassa avaruudessa $C([0, 1])$?

2. Tarkastellaan tason \mathbb{R}^2 osajoukkoja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > 1\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y \leq 1\}$$

- (a) Ovatko joukot A ja B suljettuja tai avoimia? Perustele väitteesi.
 - (b) Okoon $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 1\}$. Ovatko $A \cap E$ ja $B \cap E$ avoimia tai suljettuja E :n relatiivitopologiassa? Perustele väitteesi.
3. Olkoon $A = \{(-1)^n/n; n = 1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{R}$. Määritä joukon A kasaantumispisteet ja sulkeuma.
 4. Tarkastellaan avaruutta $C([0, 1])$ ja siellä normeja

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \|f\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|.$$

Olkoon B avoin yksikkökuula normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen, eli

$$B = \{f \in C([0, 1]); \|f\|_\infty < 1\}.$$

Osoita että B ei ole avoin normin $\|\cdot\|_1$ määrittämässä topologiassa.