Todennäköisyyslaskenta I
Kurssikoe / Helsingin Yliopisto – Avoin yliopisto
29.8.2018

Kokeessa saa käyttää apuvälineinä laskinta ja kirjoitusvälineitä. Kaavakokoelma löytyy tentin kääntöpuolelta muistin tueksi. Onnea kokeeseen!

1. Viesti lähetetään koodattuna biteiksi, eli se koostuu nollista ja ykkösistä. Viestistä 1/10 on ykkösiä, ja 9/10 nollia. Lähetysyhteydessä on kuitenkin häikkää, joten viestiä välittäessä 1/5 nollista muuttuu ykkösiksi, ja 1/3 ykkösistä nolliksi.

(a) Laske todennäköisyys, että viestiä vastaanottaessa yksittäinen (satunnaisesti valittu) merkki on ykkönen.

(b) Viestiä vastaanottaessa merkki on ykkönen. Laske todennäköisyys, että se oli ykkönen myös alkuperäisessä viestissä.

2. Eräällä satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma tiheysfunktiolla f,

$$f(x) = cx, \text{ jos } 0 \leq x \leq 10$$

ja 0 muulloin.

(a) Määritä vakio $c \in \mathbb{R}$ siten, että funktio $f(x)$ todellakin on tiheysfunktio eli että todennäköisyys arpoa luku väliltä $(0, 10)$ on yksi.

(b) Laske X:n odotusarvo ja varianssi.

3. Kattolampussa on kolme energiansäästölamppua (EU-lainsäädäntö kieltää hehkulamppujen myymisen). Kaikkien kolmen lampun kestoajat ovat toisistaan riippumattomia ja noudattavat eksponenttijakaumaa *odotusarvolla* 10000 tuntia. Sytytetään kaikki lamput yhtä aikaa.

(a) Mikä on todennäköisyys, että kaikki lamput palavat yli 20000 tuntia?

(b) Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi lampuista palaa yli 20000 tuntia?

4. Kokeeseen tullessaan opiskelija saa tietää tehtävänannon tekstistä, että normaalisti jakautuneiden satunnaismuuttujien summat (ja niiden affiinit muunnokset) ovat myös normaalisti jakautuneita, tosin jakauman parametrit (μ, σ^2) määräytyvät uudelleen muunnoksen odotusarvoksi ja varianssiksi.

Satunnaismuuttujat X_1, X_2, X_3 ovat riippumattomia ja $X_i \sim N(0, 1)$ kaikilla $i \in \{1, 2, 3\}$. Merkitään niiden keskiarvoa $\bar{X} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$.

(a) Määritä $\bar{X}$:n jakauma eli toisin sanoin laske odotusarvo ja varianssi normaalijakautuneelle satunnaismuuttujalle $\bar{X}$.

(b) Mikä on satunnaismuuttujan $\bar{X} - X_1$ jakauma?

(c) Arvioi Tsebysevin epäyhtälöllä yläraja todennäköisyydelle $P(|\bar{X} - X_1| \geq 1)$.

37
-30
00

50 · 4
· 45
250
200
2250

Kaavakokoelma muistin tueksi

- Binomikerroin: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Klassinen todennäköisyys: Olkoon $A \subseteq \Omega$ äärellisen ja symmetrisen perusjoukon Ω tapahtuma. A:n todennäköisyys on $P(A) = \frac{|A|}{n}$,
- Otanta ilman takaisinpanoa. Populaation koko N ja joukon A koko K. Todennäköisyys tapahtumalle A_k: "otoksessa on täsmälleen k joukon A alkiota" on
$$P(A_k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$
- Otanta takaisinpanolla. Todennäköisyys tapahtumalle A_k: "otoksessa on täsmälleen k joukon A alkiota" on
$$P(A_k) = \binom{n}{k}\frac{K^k(N-K)^{(n-k)}}{N^n}.$$
- Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ todennäköisyysavaruus ja A ja B sen tapahtumia. Tällöin jos tapahtumat $A_1, \ldots, A_n$ ovat erillisiä, eli $A_i \cap A_j = \emptyset$ kaikille $i \neq j$, niin $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$. Lisäksi komplementtitapahtumalle pätee $P(A^C) = 1 - P(A)$, ja yhdisteen todennäköisyydelle $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Ehdollinen todennäköisyys ($P(B) > 0$): $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$
- Kokonaistodennäköisyyden kaava ($B_1, \ldots, B_n$ on perusjoukon ositus): $P(A) = \sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)$
- Bayesin kaava ($B_1, \ldots, B_n$ on perusjoukon ositus): $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)}$
- Tapahtumia A ja B kutsutaan riippumattomiksi, jos $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Merkitään $P(A) = p$. Tällöin n-kertaisessa toistokokeessa tapahtuman B_k = "A tapahtuu tasan k kertaa" todennäköisyys on $P(B_k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, missä $k = 0, 1, \ldots, n$ ja $q = 1 - p$.
- Diskreetin satunnaismuuttujan odotusarvo: $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(x_k)$
- Jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvo: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$
- Satunnaismuuttujille X ja Y, joiden odotusarvot ovat olemassa, pätee:
  (i) (Lineaarisuus) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ kaikille $a, b \in \mathbb{R}$.
  (ii) Jos $X \perp\!\!\!\perp Y$, niin satunnaismuuttujalla XY on odotusarvo $E(XY) = E(X)E(Y)$.
- Satunnaismuuttujan varianssi: $\mathrm{var}(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E(X)^2$. Lisäksi keskihajonta on varianssin neliöjuuri.
- Satunnaismuuttujan neliön odotusarvoa $E(X^2)$ kutsutaan sen toiseksi momentiksi. Diskreetille satunnaismuuttujalle X, jonka ptnf on f se voidaan laskea seuraavana summana: $E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 f(x_i)$ ja jatkuvalle satunnaismuuttujalle Y, jonka tf on g vastaavana integraalina: $E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 g(y)\,\mathrm{d}y$.
- Satunnaismuuttujien kovarianssi: $\mathrm{Cov}(X,Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$

- Satunnaismuuttujien korrelaatio: $\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\,\mathrm{var}(Y)}}$
- Jos satunnaismuuttujan X varianssi on olemassa ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin $\mathrm{var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{var}(X)$. Lisäksi jos $X \perp\!\!\!\perp Y$, niin $\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$. Muuten $\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$
- Markovin epäyhtälö ($X \geq 0$, $E(X)$ olemassa): $P\{X \geq a\} \leq \frac{E(X)}{a}$ kaikille $a > 0$
- Tšebyševin epäyhtälö ($0 < \sigma^2 = \mathrm{var}(X) < \infty$): $P\{|X-\mu| \geq k\sigma\} \leq \frac{1}{k^2}$ kaikille $k > 0$
- Heikko suurten lukujen laki ($X_1, X_2, \ldots \perp\!\!\!\perp$, $\mu = E(X_i)$, $\mathrm{var}(X_i) < \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon\} = 0 \quad \text{kaikille} \quad \epsilon > 0.$$

- Keskeinen raja-arvolause $X_1, X_2, \ldots \perp\!\!\!\perp$ samoin jakautuneita, $\mu = E(X_i)$, $\mathrm{var}(X_i) < \infty$):

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma \xrightarrow{d} N(0,1)$$

- Normaaliapproksimaatio standardoidulle keskiarvolle: $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma \overset{d}{\approx} N(0,1)$. Vastaavasti standardoidulle summalle: $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \overset{d}{\approx} N(0,1)$.

Diskreettejä jakaumia

Jakauma	Arvojoukko	Parametrit	Ptnf $f_X(k)$	$E(X)$	$\mathrm{var}(X)$
Bernoulli(p)	$\{0,1\}$	$p \in (0,1)$	$p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
Bin(n,p)	$\{0,1,\ldots,n\}$	$n \in \mathbb{N}^+, p \in (0,1)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Geom(p)	$\{0,1,2,\ldots\}$	$p \in (0,1)$	$p(1-p)^k$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poisson(λ)	$\{0,1,2,\ldots\}$	$\lambda > 0$	$e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
Hyperg(N,K,n)	$\{0,1,\ldots,n\}$	$N,K,n \in \mathbb{N}^+$, $n \leq N$, $K \leq N$	$\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$n\cdot\frac{K}{N}$	$n\cdot\frac{K}{N}\cdot\frac{N-K}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}$

Jatkuvia jakaumia

Jakauma	Arvojoukko	Parametrit	Tf $f_X(x)$	Kf $F_X(x)$	$E(X)$	$\mathrm{var}(X)$
Tas(a,b)	(a,b)	$a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exp(λ)	$(0,\infty)$	$\lambda > 0$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1-e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	Ei sulj. muotoa	μ	σ^2

Standardinormaalijakauman kertymäfunktion arvoja

Standardinormaalijakauman kertymäfunktion Φ arvoja, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990