HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Sarjat
Erilliskoe 3 h 30 min
2.11.2016

1. Tutki, suppenevatko sarjat (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k k! k!}{(2k)!}$ ja (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\left(\sqrt[k]{k} - 1\right)$.

2. Määritä potenssisarjan $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k\sqrt{k}\,3^k}$ suppenemissäde ja suppenemisväli.

3. Laske raja-arvo $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x-x^2))^2 - x^2 + 2x^3}{\sin^4 2x}$. Käytä Taylorin kehitelmiä.

4. Muodosta funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{3^x},$$
Taylorin sarja pisteessä 1. Millä luvuilla $x \in \mathbb{R}$ sarjan summa on $f(x)$?

5. Oletetaan, että positiiviterminen sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee ja $x_k < 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että myös sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{1 - x_k}$$
suppenee.

Huom! Laskimella saatu vastaus ei missään tehtävässä riitä perusteluksi.

$(2k)!$ $(2k+2)!$
$2!$ $4!$
$3!$ $5!$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\,\frac{d}{c}$$