

Probability theory I - Exam 25.10.2018

The exam lasts 2 hours 45 minutes. Only pen and paper are allowed on the exam. The whole exam is worth 18 points: **6 points** are enough to pass; **14 points** are enough to get 5.

PROBLEM 1. Let X and Y be two independent scalar random variables uniformly distributed on $(0; 1)$ (that is, with density $\mathbb{I}_{(0;1)}$).

- (1) (**2 points**) Compute the probability distribution function of $\max(X, 2Y)$ and the expectation $\mathbb{E}(\max(X, 2Y))$.
- (2) (**2 points**) Compute $\mathbb{E}(\min(X, \frac{1}{2}))$

Olkoet X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka ovat tasajakautuneita välillä $(0; 1)$ (toisin sanoen, joiden tiheysfunktio on $\mathbb{I}_{(0;1)}$).

- (1) Laske satunnaismuuttujan $\max(X, 2Y)$ kertymäfunktio ja sen odotusarvo $\mathbb{E}(\max(X, 2Y))$.
- (2) Laske $\mathbb{E}(\min(X, \frac{1}{2}))$.

PROBLEM 2. Let X_1, X_2, \dots be scalar random variables defined on the same probability space, such that $\mu := \mathbb{E}|X_n| < \infty$ does not depend on n .

- (1) (**2 points**) Prove that $\frac{1}{n}X_n \rightarrow 0$ in probability;
- (2) (**2 points**) Prove that $\frac{1}{n^2}X_n \rightarrow 0$ almost surely.

Olkoet X_1, X_2, \dots satunnaismuuttujia samalla todennäköisyysvaruudella siten, että $\mu := \mathbb{E}|X_n| < \infty$ ei riipu n :stä.

- (1) Osoita, että $\frac{1}{n}X_n \rightarrow 0$ stokastisesti;
- (2) Osoita, että $\frac{1}{n^2}X_n \rightarrow 0$ melkein varmasti.

PROBLEM 3. (**4 points**) Let X_1, X_2, \dots be i. i. d. scalar random variables with probability density function

$$f(x) := \begin{cases} 3x^{-4}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Let $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Compute the limit $L(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\frac{1}{n}S_n \leq a)$ as a function of $a \in \mathbb{R}$.

Olkoet X_1, X_2, \dots riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia siten, että niiden tiheysfunktio on

$$f(x) := \begin{cases} 3x^{-4}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Olkoon $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Laske raja arvo $L(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\frac{1}{n}S_n \leq a)$ parametrin $a \in \mathbb{R}$ funktiona.

PROBLEM 4. (**2 points** for computation + **4 points** for justification) Let X be a scalar random variable, such that the characteristic function of X is

$$\mathbb{E}e^{itX} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Compute $\mathbb{E}X$ and $\mathbb{E}X^2$.

Olkoon X reaaliarvoinen satunnaismuuttuja siten, että X :n karakteristinen funktio on

$$\mathbb{E}e^{itX} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Laske $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}X^2$.