Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Mitta ja integraali
Loppukoe
3.3.2009

1. Osoita, että

$$m_2^*\big(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 1,\ 0 < y < 1/x^2\}\big) < \infty.$$

2. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja $f \colon A \to \mathbb{R}$. Merkitään

$$A_0 = \{x \in A \colon f \text{ on jatkuva } x\text{:ssä}\}.$$

Oletetaan, että $m(A \setminus A_0) = 0$. Osoita, että f on mitallinen.

3. (a) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja olkoot $f \colon A \to \mathbb{R}$ ja $g \colon A \to \mathbb{R}$ mitallisia funktioita. Osoita, että joukot $\{x \in A \colon f(x) < g(x)\}$ ja $\{x \in A \colon f(x) = g(x)\}$ ovat mitallisia.

   (b) Oletetaan, että funktiot $f_k \colon A \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, ovat mitallisia. Osoita, että joukko

$$\{x \in A \colon \exists \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in \mathbb{R}\}$$

   on mitallinen.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f \colon A \to \dot{\mathbb{R}}$ integroituva funktio. Osoita, että

$$m\big(\{x \in A \colon |f(x)| > c\}\big) \le \frac{1}{c}\int_A |f|$$

jokaisella $c > 0$.

5. Laske raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \frac{\sin(x^k)}{x^{k-2}}\,dx.$$

[Jos käytät jotain konvergenssilausetta, niin muista perustella käyttö tarkasti!]