MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN OSASTO
MAT21007 Mitta ja integraali
Erilliskoe 22.5.2019
koeaikaa: 3 t

Valitse ja ratkaise **5 (viisi)** tehtävää kuudesta.

1.(i) Määrittele käsite Lebesgue mitallinen joukko $A \subset \mathbb{R}^d$ Caratheodoryn ehdon avulla.
(ii) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^d$ mitallinen joukko, sekä $B \subset \mathbb{R}^d$ joukko jolle $m_d^*(B) = 0$. Näytä määritelmän perusteella, että $A \cup B$ on Lebesgue mitallinen joukko.

2. Joukkojen $A \subset \mathbb{R}^d$ ja $B \subset \mathbb{R}^d$ symmetrinen erotus on

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Näytä: jos A ja B ovat Lebesgue mitallisia joukkoja, ja $m_d(A \cap B) < \infty$, niin

$$m_d(A \Delta B) = m_d(A) + m_d(B) - 2m_d(A \cap B).$$

Tehtävässä saa vapaasti käyttää mitan ominaisuuksia. (Piirrä kuva.)

3. (i) Määrittele käsite mitallinen kuvaus $f : E \to \mathring{\mathbb{R}}$.
(ii) Olkoon $f : E \to \mathbb{R}$ ja $g : E \to \mathbb{R}$ mitallisia kuvauksia. Asetetaan $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ kun $x \in E$. Näytä, että h on mitallinen kuvaus.

4. Näytä, että joukko

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < \frac{1}{1 + x^2}\}$$

on mitallinen tasossa $\mathbb{R}^2$. *Vihje:* esitä A sopivien kuvausten alkukuvien avulla.

5. (i) Esitä dominoidun konvergenssin lause funktiojonolle $f_k : A \to \mathring{\mathbb{R}}$, missä $A \subset \mathbb{R}^d$ ja $k \in \mathbb{N}$. (Lausetta ei tarvitse todistaa, mutta esitä oletukset selkeästi.)
(ii) Laske raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^\infty \frac{\cos(\frac{t}{k})}{1 + t^2} dt.$$

Jos käytät jotakin konvergenssilausetta, niin perustele miksi lauseen oletukset ovat voimassa!

6. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^d$ mitallinen joukko, sekä $f_j : E \to [0, \infty]$ jono mitallisia kuvauksia kun $j \in \mathbb{N}$, jolle

$$0 \leq f_{j+1}(x) \leq f_j(x)$$

kaikilla $x \in E$ ja $j \in \mathbb{N}$. Olkoon $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ kun $x \in E$. Näytä: jos f_1 on integroituva joukon E yli, niin

$$\int_E f = \lim_{j\to\infty} \int_E f_j.$$

Vihje: dominoidun konvergenssin lause, tai monotonisen konvergenssin lause (sopivasti).