MAT21001 Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Kurssikoe 3.3.2025
Koeaika: klo 9.00 - 11.30

Tenttijällä saa olla kurssikokeessa mukana **yksipuolinen A4-kokoinen käsinkirjoitettu muistilappu**. Laskinta ei saa käyttää kokeessa.

1. Olkoon $v \in \mathbb{R}^{n\times 1} \setminus \{0\}$ annettu vektori. Tutki, ovatko seuraavat kuvaukset f ja g lineaarikuvauksia $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times 1}$.

(1) $f(A) = Av$, missä $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
(2) $g(A) = Av + v$, missä $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Perustele!

Ratkaisu.

(1) Kuvaus $f(A) = Av$ on lineaarikuvaus, sillä kaikilla $c \in \mathbb{R}$ pätee $f(cA) = (cA)v = c(Av) = cf(A)$ (2p) ja $f(A+B) = (A+B)v = Av + Bv = f(A) + f(B)$ (1p).
(2) Kuvaus $g(A) = Av + v$ ei ole lineaarikuvaus, sillä jos valitaan $A = 0$, niin saadaan $g(0) = v \neq 0$, mutta lineaarikuvaus kuvaa nollan aina nollaksi (3p). (Vaihtoehtoisia ratkaisuja löytyy monia.)

2. Olkoon $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus

$$L(x, y) = (3x + y, x + 3y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Määritä kuvauksen L ominaisarvot ja vastaavat ominaisavaruudet.

Ratkaisu. Vektorit $e_1 = (1, 0)$ ja $e_2 = (0, 1)$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan. Tässä kannassa lineaarikuvaus L kuvaa

$$L(e_1) = (3, 1) = 3e_1 + e_2$$
$$L(e_2) = (1, 3) = e_1 + 3e_2.$$

Kuvauksella L on siis esitysmatriisi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \quad \text{(1p)}$$

Koska kuvauksen L ominaisarvot ovat samat kuin sen esitysmatriisin ominaisarvot, riittää selvittää matriisin A ominaisarvot yhtälöstä $\det(A - \lambda I) = 0$. Auki kirjoitettuna tämä on

$$(3 - \lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 3 - \lambda = \pm 1 \Leftrightarrow \lambda \in \{2, 4\}. \quad \text{(2p oikeista ominaisarvoista)}$$

Lasketaan seuraavaksi ominaisarvoa $\lambda = 2$ vastaava ominaisavaruus $E(2, L)$. Pätee

$$\begin{aligned} &L(x, y) = 2(x, y) \\ \Leftrightarrow &3x + y = 2x \text{ ja } x + 3y = 2y \\ \Leftrightarrow &x + y = 0, \end{aligned}$$

joten jokainen vektori muotoa $(x, -x)$ on ratkaisu ja $E(2, L) = \mathrm{Sp}((1, -1))$.
Ominaisavaruuden voi laskea myös matriisin A ominaisavaruuksista ja käyttämällä (triviaalia) isomorfismia avaruuksien $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^{2\times 1}$ välillä. Lasketaan matriisin A ominaisarvoa $\lambda = 4$ vastaava ominaisavaruus

$$(A - 4I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

Scanné avec CamScanner

eli A:n ominaisarvoa $\lambda = 4$ vastaava ominaisavaruus on vektorin $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}'$ virittämä. Tämä voidaan kuvata avaruuteen $\mathbb{R}^2$ isomorfismilla $\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}' \mapsto (x_1, x_2)$. Siispä kuvauksen L vastaava ominaisavaruus on vektorin $(1,1)$ virittämä. (3p oikeista ominaisavaruuksista, isomorfismeja ei tarvitse eksplisiittisesti todeta.)
Tehtävän voi myös ratkaista ilman matriisia A, jolloin oikeista ominaisarvoista annetaan suoraan 3p.

3. Olkoon $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,1,2)$, $v_1 = (2,1,3)$ ja $v_2 = (1,0,1)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita.

(1) Näytä, että jonot (u_1, u_2) ja (v_1, v_2) ovat saman aliavaruuden $V \subset \mathbb{R}^3$ kaksi eri kantaa tarkistamalla että jonot ovat vapaita ja osoittamalla, että u_1 ja u_2 voidaan esittää vektoreiden v_1 ja v_2 lineaarikombinaatioina. (4p)

(2) Etsi kannanvaihtomatriisi $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, joka kuvaa vektorin $v \in V$ koordinaatit kannassa (u_1, u_2) sen koordinaateiksi kannassa (v_1, v_2). (2p)

Ratkaisu.

(1) Havaitaan ensin, että (u_1, u_2) on vapaa, sillä jos $au_1 + bu_2 = 0$, pätee yhtälöt $a + b = 0$ ja $b = 0$, joiden ainoa ratkaisu on $a = b = 0$. Samoin jos $av_1 + bv_2 = 0$, pätee $2a + b = 0$ ja $a = 0$, joten $a = b = 0$. Siispä (v_1, v_2) on vapaa. (1p) Olkoon $V = \mathrm{Sp}(u_1, u_2)$. Riittää näyttää, että (v_1, v_2) virittää avaruuden V, ja tätä varten on riittävää näyttää, että vektorit u_1 ja u_2 voidaan esittää vektoreiden v_1 ja v_2 lineaarikombinaatioina. (1p). Ratkaistaan ensin yhtälö

$$u_1 = xv_1 + yv_2 \Leftrightarrow (0,1,1) = x(2,1,3) + y(1,0,1)$$

Saamme yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} 0 &= 2x + y \\ 1 &= x \\ 1 &= 3x + y, \end{aligned}$$

jonka ainoa ratkaisu on $x = 1$, $y = -2$. Siispä $u_1 = v_1 - 2v_2$. Ratkaistaan vielä

$$u_2 = pv_1 + qv_2 \Leftrightarrow (1,1,2) = x(2,1,3) + y(1,0,1),$$

eli saamme yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} 1 &= 2x + y \\ 1 &= x \\ 2 &= 3x + y, \end{aligned}$$

jonka ainoa ratkaisu on $x = 1$ ja $y = -1$ ja $u_2 = v_1 - v_2$. (2p oikeasta laskusta, vastauksen voi myös arvata)

(2) Jokainen $v \in V$ voidaan esittää muodossa $v = au_1 + bu_2$, missä $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ on vektorin v koordinaattivektori kannassa (u_1, u_2). Toisaalta (1) kohdan perusteella

$$v = a(v_1 - 2v_2) + b(v_1 - v_2) = (a+b)v_1 - (2a+b)v_2,$$

joten vektorin v koordinaattivektori kannassa (v_1, v_2) on $\begin{bmatrix} a+b \\ -2a-b \end{bmatrix}$. Kannanvaihtomatriisi on siis

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

Scanné avec CamScanner

sillä

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ -2a-b \end{bmatrix}.$$

(2p oikeasta kannanvaihtomatriisista. Sen voi etsiä myös katsomalla, miten kantavektorit kuvautuvat yksitellen.)

4. Olkoon $V = \{(x, y, x+y, x-y)^t \in \mathbb{R}^{4\times 1} : x, y \in \mathbb{R}\}$ avaruuden $\mathbb{R}^{4\times 1}$ aliavaruus.
   (1) Näytä, että vektorit $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1,1)^t$ ja $v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,-1)^t$ ovat avaruuden V ortonormaali kanta.
   (2) Olkoon $\pi_V \colon \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{4\times 1}$ ortogonaalinen projektio aliavaruudelle V. Etsi kuvaukselle π_V esitysmatriisi avaruuden $\mathbb{R}^{4\times 1}$ standardikannan (e_1, e_2, e_3, e_4) suhteen.

Ratkaisu.

(1) Todetaan ensin, että selvästi $v_1 \in V$, mikä nähdään valitsemalla V:n määritelmässä $x = 1$ ja $y = 0$. Samoin $v_2 \in V$, mikä nähdään valitsemalla $x = 0$ ja $y = 1$. Siispä $\mathrm{Sp}(v_1, v_2) \subset V$. (1p) Lisäksi pätee $\|v_1\|^2 = \frac{1}{3}(1+0+1+1) = 1$, $\|v_2\|^2 = \frac{1}{3}(0+1+1+1) = 1$ ja $v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{3}(1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot -1) = 0$, joten (v_1, v_2) on ortonormaali jono ja siten vapaa. (1p) Koska V on lineaarikuvauksen $\mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{4\times 1}$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$

kuva, on sen dimensio korkeintaan 2. Siispä (v_1, v_2) virittää avaruuden V. (1p)

(2) Tapa 1: Käytetään monisteen/luentojen lausetta, että ortogonaalinen projektio voidaan esittää kaavan QQ^t avulla, missä $Q = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$. (2p) Lasketaan siis

$$QQ^t = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2. \end{bmatrix} \quad (1p)$$

Tapa 2: Lähdetään liikkeelle ortogonaaliprojektion kaavasta

$$\pi_V(v) = \langle v, v_1\rangle v_1 + \langle v, v_2\rangle v_2$$

(1p) Riittää tutkia, kuinka kantavektorit e_1, e_2, e_3, e_4 kuvautuvat:

$$\pi_V(e_1) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0, \quad \pi_V(e_2) = 0 + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\pi_V(e_3) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \pi_V(e_4) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1p) Esitysmatriisissa on siis nämä sarakkeina:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1p)$$

Scanné avec CamScanner