AY/HY Lineaarialgebra ja matriisilasku I, tentti

Ke 17.6.2020, klo 8.00–to klo 8.00

Palauta luettavana, PDF-muodossa, vastaukset tehtävien mukaan numeroituina. Mieluiten numerojärjestyksessä yhdessä tiedostossa, ei liian suuriresoluutioisina valokuvina käsin kirjoitetuista vastauksista.

Esimerkiksi leikkaa-liimaa kuvat tekstinkäsittelyohjelmaan ja tulosta/tallenna/vie PDF-muotoon. Huomaa Moodlen 50 Mtavun raja per tiedosto, joten jos et osaa pienentää resoluutiota (gimp, Windows Valokuvat→Muuta kokoa), jaa tulos useaan tiedostoon; nimeä tiedostot niin, että tiedän, mistä etsin minkin numeroista tehtävää, esim. Vast-8.pdf, Vast9-17, Vast18-.pdf. Ihan mukavaa, jos merkitset tiedoston sisällä jotenkin, mitkä tehtävät puuttuvat välistä, esim. "8. (Puuttuu)" tms.

Arvostelu: kukin muu tehtävä 1p, tähdelliset 2p.

1. Piirrä kuva alueesta avaruudessa $\mathbb{R}^2$, jossa $x \geq 0$, $y \geq 0$, $-x + y \leq 3$, $\frac{x}{5} + y \leq 4$ ja $x + y \leq 7$.

2. Piirrä kuva, josta käy ilmi tilanne, jossa funktio $f(x, y) = kx + y$ (missä $k = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$) saavuttaa suurimman mahdollisen arvonsa, kun (x, y) on piste tehtävän 1 alueessa. (Voit piirtää sen samaan kuvaan edellisen kanssa, kunhan on selvää, mikä on funktio f kuvassa.) Mikä tuo suurin arvo on?

3. * Millä vakion k arvoilla on tehtävän 2 funktiolla f useampia kuin yksi piste (x, y), jolla se saavuttaa maksimiarvonsa tehtävän 1 alueessa? (Lyhyt perustelu!)

4. Osoita, että

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y) \Leftrightarrow (\exists s \in \mathbb{R}, s \geq 0 : x + s = y).$$

   [$\forall$ luetaan "kaikille", $\exists$ luetaan "on olemassa" ja kaksoispiste : "siten, että" tai "pätee" tilanteesta riippuen.]

5. Esitä (lineaarinen) yhtälöryhmä – mahdollisimman samanlainen kuin ehdot ovat tehtävässä 1 – jonka toteuttavat pisteet (x, y) ovat täsmälleen ne, jotka ovat tehtävän 1 alueessa. Käytä tässä apumuuttujia $s_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, ilman kertoimia, mutta vain se määrä, joka on tarpeen. Oletetaan, että kaikki nimetyt muuttujat ovat epänegatiivia, siis 0 tai suurempia, joten tällaisia ehtoja ei tarvitse esittää.

6. Mitkä ovat kunkin muun muuttujan arvot tehtävän 5 yhtälöryhmässä, kun $x = 0, y = 0$?

7. Anna tehtävän 5 yhtälöryhmän matriisiesitys, muuttujat järjestyksessä ensin x, sitten y, sitten muut muuttujat kasvavassa järjestyksessä alaindeksin mukaan, viimeksi yhtälön oikea puoli.

   Tehtävän 7 matriisissa muuttujia s_i vastaavat pystyvektorit muodostavat identiteettimatriisin, ehkä epäjärjestyksessä. Kutsutaan jatkossa niitä muuttujia, joita vastaavat pystyvektorit näin muodostavat identiteettimatriisin tällaisessa matriisissa *kantamuuttujiksi*.

8. Lisää tehtävän 7 matriisiin ylimmäksi (riviksi 0) rivi, joka esittää tavoitefunktiota $f(x, y)$ tehtävästä 2 muodossa $f - f(x, y) = 0$; tässä ensimmäinen f on muuttuja kuten x ja y:kin; matriisissa se on järjestyksessä ensimmäisenä, ennen kaikkia muita.

   Muuttujaa f ei lueta kantamuuttujaksi tässä tai jatkossa.

9. Mitä muuttujaa vastaava, tehtävän 8 rivin 0 (= *tavoitefunktion*) alkio on tässä matriisissa *negatiivisista* rivin 0 alkioista itseisarvoltaan suurin?

   Kutsutaan jatkossa tätä muuttujaa *sisääntulevaksi muuttujaksi* kulloisessakin matriisissa.

10. Mitä kantamuuttujaa (ei siis f) vastaavalla rivillä (sillä ainoalla rivillä, jossa tällä muuttujalla on kerroin 1, muilla 0), on tehtävän 8 matriisin (tehtävässä 9 valitun) sisääntulevan muuttujan tällä rivillä olevan alkion a ja yhtälöiden oikeaa puolta esittävän sarakkeen tämän rivin alkion r suhde $\frac{r}{a}$ pienin? (Jos tällaisia rivejä on useita, käytä ylintä.) Ota tällä tavalla kantamuuttujaa etsittäessä mukaan *vain* sellaisia rivejä, joilla rivin alkio a on positiivinen.

    Kutsutaan jatkossa tätä muuttujaa *poistuvaksi muuttujaksi* kulloisessakin matriisissa.

11. * Tee tehtävän 8 matriisille vain ne alkeisrivioperaatiot, joilla tehtävässä 9 valittu sisääntuleva muuttuja korvaa tehtävässä 10 valitun poistuvan muuttujan uutena kantamuuttujana. Anna vain lähtötilanne ja alkeisrivioperaatioiden tuloksena saatu matriisi, älä välimuotoja, mutta nimeä vastauksessasi kukin tekemäsi alkeisrivioperaatio. Tuloksena olevassa matriisissa sisääntulevan muuttujan sarakkeessa on täsmälleen yksi 1 ja kaikki muut ovat nollia, myös rivillä 0.

12. * Toista tehtävien 9–11 menettelyä, kunnes näistä ensimmäisessä ei enää löydy negatiivista alkiota tavoitefunktion riviltä 0. Anna vastauksenasi kukin matriisi ennen tämän "lopetusehdon" tarkastamista. (Tehtävän 11 vastausta ei tarvitse toistaa.)

13. Vertaamalla tehtävän 12 tulosta tehtävän 2 kuvaan tunnista matriisista, missä siinä sijaitsevat tavoitefunktion arvo, muuttujan x arvo ja muuttujan y arvo: vastauksena tehtävään kuvaa nämä paikat lyhyesti tavalla, jolla muutkin voivat löytää vastaavat luvut muista tällaisista matriiseista.

    Seuraavasta kuudesta tehtävästä vastaa $\boxed{\text{korkeintaan kolmeen}}$. Jos vastaat enempään,

arvostellaan niistä kolme numerojärjestyksessä ensimmäistä.

14. Mitkä ovat matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 9 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot (engl. *eigenvalues*)?

15. Mitkä ovat tehtävän 14 matriisin A kutakin ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit?

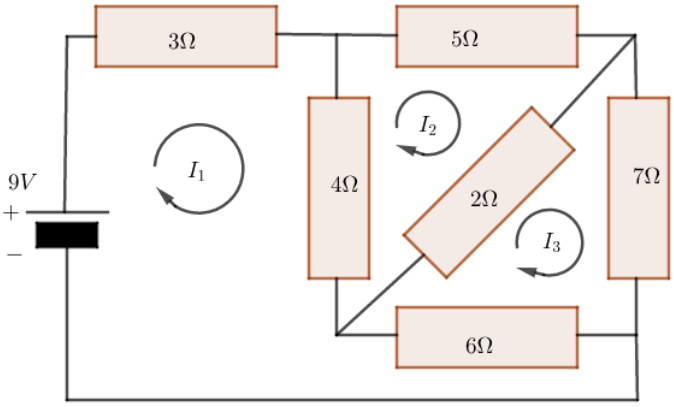
16. Onko tehtävän 14 matriisi A diagonalisoituva?

17. * Rahaa kerätäkseen DigiTaLi-säätiö myy digitaalisesti (jolloin materiaalihävikki on nolla ja laatu korkea) valmistettuja tantaali-litium seoksia, A (seossuhde Ta:Li = 3:1), B (1:1) ja C (1:2), kilohintaan 20, 30 ja 50 killinkiä, vastaavasti. Tantaalia on varastossa 30 kg, ostettu kilohintaan 7, ja litiumia 20 kg, ostettu kilohintaan 11 killinkiä. Säätiön pitää päättää, miten paljon kutakin lajia kannattaa säätiön valmistaa varastossa olevasta materiaalista olettaen, että kaikki saadaan joka tapauksessa myytyä. Muotoile tämä ongelma tehtävien 5–8 tapaan yhtälöryhmänä (tai epäyhtälöryhmänä ilman apumuuttujia s_i) ja tavoitefunktiona. Perustele riittävästi, miksi (epä)yhtälöryhmä on juuri tämä.

18. * Anna tehtävän 17 matriisi tehtävien 7–8 tapaan.

19. * Ratkaise tehtävässä 17 muotoilemasi ongelma käyttäen tehtävien 9–12 menetelmää.

20. * Vastuksen R aiheuttama jännitehäviö U saadaan sen läpi kulkevasta virrasta I Ohmin lailla $U = RI$. Jännitehäviö on positiivinen kuljettaessa virran suuntaan vastuksen läpi ja negatiivinen päinvastaisessa tapauksessa. Tasajännitelähteen (paristo?) jännite on sen ulkopuolella positiivinen sen positiivisen ja negatiivisen navan välillä. Tarkastellaan seuraavaa virtapiiriä (Ω = ohmi = voltti/ampeeri, V = voltti):



Tässä on annettu kullekin alipiirille i (1: paristo, 3, 4, 6 Ω vastukset, 2: 5, 2, 4 Ω vastukset, 3: 7, 6, 2 Ω vastukset) virran I_i suunta. Muodosta yhtälö kullekin kolmelle eri reitille pariston positiiviselta navalta negatiiviselle. Kussakin toisella puolella yhtälön on pariston jännite, toisella kukin reitillä kohdattu vastus kerrottuna sen läpi kulkevien virtojen summalla etumerkki huomioiden: siis reitin suuntaan kulkeva virta positiivisena, reittiä vastaan kulkeva virta negatiivisena.

21. Muodosta tehtävän 20 yhtälöryhmästä matriisi, jossa muuttujina ovat virrat I_i.

22. * Ratkaise tehtävän 20 yhtälöryhmästä kaikki virrat I_i käyttämällä Gaussin eliminaatiota ja takaisinsijoitusta tai Gauss-Jordan eliminaatiota.

23. (Bonuspiste!) Mitä tarkoittaa, jos jokin tehtävässä 22 saamasi virta I_j on negatiivinen? Mihin lineaarisen kuvauksen ominaisuuteen tai ominaisuuksiin liittyy se, että tehtävässä 20 jännitehäviö on vastus kerrottuna etumerkillä varustettujen virtojen summalla? Mikä kuvaus tässä on lineaarinen?

24. Määritellään kertolasku ja yhteenlasku joukossa $\{0, 1\}$ kuten ennenkin paitsi, että $1 + 1 = 1$ (Boolen algebra, matemaatikon George Boole mukaan). Osoita antamalla yhteenlaskun ja loogisen TAI-operaation kertotaulut, että yhteenlasku ja looginen TAI-operaatio ovat sama operaatio, jos tulkitaan 0 = epätosi ja 1 = tosi. (Kertolasku on looginen JA.)

25. Määritellään *vierusmatriisi* A pisteiden $i, j \in [\![1, n]\!]$, $n \geq 1$ ($[\![a, b]\!] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$, siis kokonaisluvut väliltä $[a, b]$) olemaan neliömatriisi, joka koostuu alkioista $a_{i,j} \in \{0, 1\}$, siten että $a_{i,j} = 1$ täsmälleen silloin kun on välitön, yksisuuntainen yhteys "solmusta" i "solmuun" j (i ja j ovat "vierekkäin"; esimerkiksi yksisuuntainen katu yhdistää ne) ja 0 muuten. Mitä tarkoittaa solmujen yhteyksien kannalta, että matriisin kertolaskun $A^2 = AA$ alkio $\mathrm{aa}_{i,j} = 1$, kun käytetään Boolen algebraa matriisien kertolaskussa?

26. * Kuvaa lyhyesti tapa laskea vierusmatriisin potenssi A^n käyttäen korkeintaan $\lceil \log_2(n) \rceil$ matriisin kertolaskua Boolen algebrassa. (Tässä $\lceil x \rceil$ on x pyöristettynä kokonaislukuun ylöspäin.)