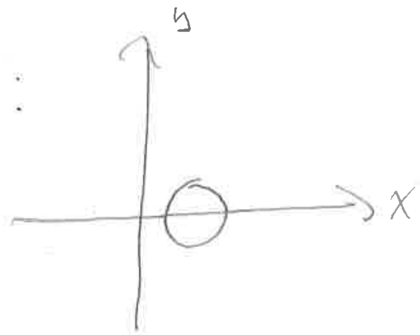

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Geometria, kevät 2014
2. kurssikoe (korvaava koe)
6.5.2014

Kaikissa tehtävissä saa käyttää kaikkia kurssilla esillä olleita lauseita.

1. Olkoon Γ O-keskinen, r-säteinen ympyrä. Olkoon piste P ympyrän Γ ulkopuolella. Olkoon a suora, joka kulkee pisteen P kautta ja sivuaa ympyrää Γ pisteessä A. Olkoon b pisteen A kautta kulkeva suora, joka on kohtisuorassa suoraa OP vastaan. Leikatkoon suora b puolisuoran OP pisteessä P'. Osoita, että tällöin pätee $OP \cdot OP' = r^2$ eli että P' on pisteen P kuva inversiossa ympyrän Γ suhteen. *(6 p)*

2. Tarkastellaan kuvauksia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ja $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jotka on määritelty ehdoilla $f(x,y) = (3x, 3y)$ ja $g(x,y) = (x+3, y+3)$.

a) Osoita, että f on homotetia. *(3 p)*
b) Osoita, että g ei ole homotetia. *(3 p)*

3. a) Anna esimerkki algebrallisesta irrationaaliluvusta, joka voidaan konstruoida harpilla ja viivaimella (kun yksikköjana on annettu) ja joka kuuluu johonkin muotoa $\mathbb{Q}[\sqrt{k}]$ olevaan kuntaan. (Algebrallisella luvulla tarkoitettiin sellaista reaalilukua, joka on jonkin kokonaislukukertoimisen polynomiyhtälön ratkaisu.) Näytä, että esimerkkinäsi antamasi luku on algebrallinen, kerro mihin muotoa $\mathbb{Q}[\sqrt{k}]$ olevaan kuntaan luku kuuluu ja selitä, miten konstruoisit kyseisen luvun. *(4 p)*
b) Anna esimerkki algebrallisesta irrationaaliluvusta, jota ei voida konstruoida harpilla ja viivaimella. *(2 p)* (Perusteluksi riittää, että näytät, että kyseinen luku on algebrallinen ja että luvun konstruoinnin mahdottomuus on todistettu kurssilla.)

4. a) Minkälainen euklidisen tason osajoukko on Poincarén (kiekko)mallin P-suora, joka ei kulje mallin perusympyrän keskipisteen kautta? *(2 p)*
b) Otetaan yksikköympyrä $x^2+y^2 = 1$ Poincarén (kiekko)mallin perusympyräksi. Määritä yhtälö sille ympyrälle, joka leikkaa x-akselin kohtisuorasti ja on pisteen $(\frac{1}{2}, 0)$ kautta kulkevan P-suoran kantaja. *(4 p)*