Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
I Kurssikoe 21.10. 2011

1. Olkoon $f \in L^1[-\pi, \pi]$ reaaliarvoinen parillinen funktio,

$$f(x) = f(-x) \in \mathbb{R}, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Osoita, että f:n Fourier kertoimet ovat reaalisia: $\widehat{f}(n) \in \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

2. Tarkastellaan 2π-periodista funktiota, jolle $f(x) = \pi - |x|$, kun $x \in [-\pi, \pi]$. Laske f:n Fourierin kertoimet $\widehat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Suppeneeko f:n Fourier sarja jokaisessa pisteessä $x \in [-\pi, \pi]$? Perustele vastauksesi.

3. Olkoon $f \in C^2(\mathbb{R})$ funktio, joka on 2π-periodinen. Osoita, että

$$\|f'\|^2_{L^2[-\pi,\pi]} \leq \|f\|_{L^2[-\pi,\pi]} \, \|f''\|_{L^2[-\pi,\pi]}.$$

4. Mikä seuraavista perheistä $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ 2π-periodisia funktioita on *hyvä perhe ytimiä*, luennoilla annetun määritelmän mielessä;

i) $K_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{x^2}$, *ii)* $K_n(x) = 2\pi\, n \max\{0,\, 1-n|x|\}$, *iii)* $K_n(x) = \pi \dfrac{\cos(x/2n)}{2n \sin(\pi/2n)}$.

Yllä kunkin perheen arvot on annettu välillä $x \in [-\pi, \pi]$.
Perustele vastauksesi.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
2. kurssikoe
16.12. 2011

1. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Osoita, että sen Fourier muunnos $\widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d$, on rajoitettu ja jatkuva funktio.

2. Näytä, että $f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$, ei ole minkään funktion $g \in L^2(\mathbb{R})$ Fourier muunnos. Onko f jonkun distribuution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ Fourier muunnos? Jos on, määrää T.

3. i) Jos $a \in \mathbb{R}$, osoita että kuvaus $\delta_a : g \mapsto g(a), \ g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, määrää temperoidun distribuution.

ii) Osoita, että summa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\,\delta_n$ suppenee $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:ssä.

4. i) Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R})$. Jos $|\xi|\widehat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$, osoita että

$$f \in C^1(\mathbb{R}).$$

ii) Jos $f = \chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]} * \cdots * \chi_{[-1,1]}$, missä f on $(n+2)$:n karakteristisen funktion konvoluutio, $n \geq 1$, näytä että

$$f \in C^{(n)}(\mathbb{R}).$$

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
I Kurssikoe 19.10.2012

1. Olkoon $f \in L^1[-\pi, \pi]$ reaaliarvoinen funktio, jonka kaikki Fourier kertoimet ovat reaalisia, s.o. $\widehat{f}(n) \in \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Osoita, että silloin f on parillinen,

$$f(x) = f(-x) \in \mathbb{R}, \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

2. Anna esimerkki funktiosta $f \in L^1[-\pi, \pi]$, jonka Fourier sarja suppenee jokaisessa pisteessä $x \in [-\pi, \pi]$, mutta jolle $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| = \infty$.

Perustele vastauksesi laskematta f:n Fourier kertoimia, käyttäen vain funktion f ominaisuuksia ja luennoilla esitettyjä tuloksia.

3. Jos $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$, olkoon $h(x) = (f * g)(x)$ niiden konvoluutio. Osoita, että h:n Fourier kertoimille pätee

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, \widehat{h}(n) \,| < \infty.$$

4. Mikä seuraavista perheistä $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ 2π-periodisia funktioita on *hyvä perhe ytimiä*, luennoilla annetun määritelmän mielessä;

$$i)\ K_n(x) = x \frac{n\pi}{4} \chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x),$$

$$ii)\ K_n(x) = n\pi\, \chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x),$$

$$iii)\ K_n(x) = (n+1) \left(\frac{|x|}{\pi} \right)^n.$$

Yllä kunkin perheen arvot on annettu välillä $x \in [-\pi, \pi]$; merkintä $\chi_{[a,b]}$ tarkoittaa välin $[a, b]$ karakteristista funktiota.

Perustele vastauksesi.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
II Kurssikoe 17.12. 2012

Laske **4** tehtävää seuraavista.

1. Määritellään $f_n(x) = \sin(nx)$ ja $h_n(x) = n\chi_{[-n,n]}(x), \quad n \in \mathbb{N}$.
Suppeneeko jono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruudessa $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$? Entä suppeneeko jono $(h_n)_{n=1}^{\infty}$?

Suppenevissa tapauksissa määrää k.o. jonon raja-arvo $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:ssa.

2. Oletetaan, että $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Osoita, että konvoluutio $f * g$ on jatkuva, ja että sen Fourier muunnos kuuluu avaruuteen $L^{2012}(\mathbb{R}^d)$.
[Vihje: Voit käyttää luennolla todistettuja tuloksia.]

3. Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Osoita, että

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \right)^2 \leq c_0 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

jollakin vakiolla $0 < c_0 < \infty$.
[Vihje: Kirjoita integraali $\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 \, dx$ kahdella eri tavalla. Vakioksi voi valita $c_0 = 2/\pi$.
Todistamasi epäyhtälö on eräs versio Heisenbergin epätarkkuusperiaatteesta.]

4. Muotoile Poissonin summauskaava, ja osoita sen avulla että

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{2} \frac{e+1}{e-1}.$$

[Vihje: Laske funktion $f(x) = e^{-|x|}$ Fourier muunnos.]

5. (i) Valitaan funktio $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, jolle $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \, dx = 1$.
Osoita, että silloin jokaisella $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ funktio

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt \right) \int_{-\infty}^{x} \psi(t) \, dt$$

kuuluu Schwarzin luokkaan $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(ii) Osoita kohdan (i) havainnon avulla, että jos $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ja (distribuutio)derivaatta $T' = 0$, silloin $T =$ vakiofunktio.

FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

1. KURSSIKOE (pe 18.10, 10-12 salissa D122)

1. Etsi 2π-jaksoisen funktion f Fourier-kertoimet kun $f(x) = 0$ arvoilla $x \in [-\pi, 0]$ ja $f(x) = x$ kun $x \in (0, \pi)$. Mitä osaat sanoa saadun Fourier-sarjan pisteittäisestä suppenemisesta?

2. Olkoon $f \in C_{\#}(-\pi, \pi)$ jatkuva ja 2π-periodinen funktio. Osoita, että f:llä on periodina myös luku π (eli identtisesti $f(x + \pi) = f(x)$) jos ja vain jos sen Fourier-kertoimet toteuttavat ehdon

$$\widehat{f}(n) = 0 \qquad \text{aina kun } n \text{ on pariton.}$$

3. Todista että jatkuvasti derivoituvan ja 2π-periodisen funktion $f \in C^1_{\#}(-\pi, \pi)$ Fourier-sarja suppenee itseisesti jokaisessa pisteessä.

4. Voidaanko valita vakiot $c_n > 0$ siten, että jono $(f_n)_n \geq 1$ on *hyvä perhe ytimiä* luentojen määritelmän mukaisesti, kun jokaisella kokonaisluvulla $n \geq 1$ funktio f_n on 2π-periodinen ja

$$f_n(x) = c_n\big(1 - \frac{|x|}{\pi}\big)^n \quad \text{kun} \quad x \in [-\pi, \pi).$$

FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

2. KURSSIKOE (ti 10.10, 10-12 salissa C123)

Valitse <u>4 tehtävää</u> seuraavista:

1. (i) Laske reaaliakselin välin $[0,1]$ karakteristisen funktion $\chi_{[0,1]}$ Fourier-muunnos.

(ii) Näytä että funktio $x \mapsto x\sin(x)$ on jonkun distribuution $\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ Fourier-muunnos. Mikä kyseinen distribuutio on?

2. Mitkä seuraavista väitteistä ovat oikein, mitkä väärin? Anna vastauksellesi lyhyt perustelu (kaikkia yksityiskohtia ei tarvita ja voit käyttää kaikkia luentojen tuloksia hyväksi).

a) Distribuutio $|a|\delta_a$ suppenee kohti nollaa avaruudessa $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ kun $|a| \to \infty$.

b) Jos $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ on rajoitettu ja kompaktikantajainen funktio, niin silloin $\widehat{f} \in L^2(\mathbf{R})$.

c) Jos f on avaruudessa $L^1(\mathbf{R})$, niin silloin $\widehat{f}$ on funktio jolle $(1+\xi^2)^N \widehat{f}(\xi) \to 0$ jokaisella $N \geq 1$ kun $|\xi| \to \infty$.

d) Jos distribuution $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ kantaja koostuu yhdestä ainoasta pisteestä $a \in \mathbf{R}^d$, niin silloin $\widehat{T}$ on rajoitettu funktio.

3. Formuloi Poissonin summakaava. Laske sen avulla distribuution

$$\lambda := \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_n$$

('Diracin kampa' reaaliakselilla) Fourier-muunnos.

4. Olkoon $g \in L^2(\mathbf{R}^d)$. Osoita, että osittaisdifferentiaaliyhtälöllä

$$\Delta f \ - \ f \ = \ g$$

on ratkaisu $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$. Tässä $\Delta f = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f$, missä derivaatat tulkitaan distribuutiomielessä. Esitä kaava ratkaisufunktiolle f (se saa sisältää Fourier-muunnoksia tai Fourierin käänteismuunnoksia).

5. Olkoon $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Oletetaan, että $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ toteuttaa $\phi(x) = 1$ kun $|x| \leq 1$, ja merkitään $\phi_k(x) = \phi(x/k)$. Osoita, että

$$\phi_k g \longrightarrow g \qquad \text{avaruudessa} \quad \mathcal{S}(\mathbf{R}^d).$$