HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II (MAT21013)
Yleinen tentti 09.01.2019 (Tentin kesto on kolme tuntia.)

Tentissä ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

Ratkaise seuraavat tehtävät 1, 2, 3 ja 4. Jokaisesta tehtävästä saa enintään 6 pistettä.

1. Olkoot $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvat. Oletetaan, että jatkuvasti derivoituva funktio $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa epäyhtälön
$$y'(x) \leq p(x)y(x) + q(x)$$
kaikille $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että funktiolle y pätee
$$y(x) \leq e^{\int_0^x p(t)\,dt}\Big(y(0) + \int_0^x e^{-\int_0^t p(s)\,ds} q(t)\,dt\Big)$$
kaikille $x \geq 0$.

2. Olkoot $\mathbf{x}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{x}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ differentiaaliyhtälösysteemin
$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$$
ratkaisuja, missä
$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{ja } A = \begin{bmatrix} t & -t \\ 0 & t \end{bmatrix}.$$
Olkoon $W(t) = W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(t)$ vektorifunktioiden $\mathbf{x}_1$ ja $\mathbf{x}_2$ Wronskin determinantti, eli,
$$W(t) = W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(t) = \det[\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)] = \det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{bmatrix}.$$
Osoita, että
$$W'(t) = 2tW(t).$$

3. Ratkaise
$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t),$$
missä
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Ratkaise
$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t),$$
missä
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$