

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Määrää seuraavalle homogeenisysteemille perusjärjestelmä \mathbf{R} :ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

2. Määrää autonomisen parin

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)^2 - 4 \\ \dot{y}(t) &= x(t)y(t) + 1. \end{aligned}$$

kriittiset pisteet ja niiden laatu (stabiili vai epästabiili).

3. Anna seuraavan systeemin yleinen ratkaisu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 15e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Funktiot

$$y(x) = ce^{dx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad \text{joissa } c \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \text{ ja } d \in \mathbf{R} \text{ ovat vakioita,}$$

ovat epälineaarisen 2.kl. differentiaaliyhtälön

$$y'' - (y')^2/y = 0$$

ratkaisuja. Osoita että ne antavat kyseisen yhtälön kaikki ratkaisut puolitasoissa $D_1 = \{(x, y) \mid y > 0\}$ ja $D_2 = \{(x, y) \mid y < 0\}$ (joissa yhtälö on määritelty).

Ohje. Muunna yhtälö 1.kl. pariksi (vaikkapa) ja sovelta 1.kl. systeemien lokaalia OY-lausetta. Minkä muodon annetut ratkaisut tällöin saavat?