

Differentiaaliyhtälöt II

Yleinen tentti, 15.6.2016

1. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ratkaise alkuarvottehtävä

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) - xy, \\ \dot{y} &= xy - \frac{1}{2}y \end{aligned}$$

tasapainokohdat ja tutki niiden stabiilisuutta. Piirrä faasikuviot \mathbf{R}_+^2 :ssa.

3. Olkoot

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos t & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Määritä systeemin $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$ tilansiirtomatriisi ja ratkaise alkuarvottehtävä

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Differentiaaliyhtälöllä

$$\ddot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$$

on ratkaisu $x(t) = te^t$. Määritä yhtälön yleinen ratkaisu.