

## Differentiaaliyhtälöt II

Yleinen tentti 24.5.2016

1. Olkoon  $A(t)$   $2 \times 2$ -matriisi. Onko mahdollista, että sekä  $x_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  että  $x_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$  toteuttavat yhtälön  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ ?

2. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - z, \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= y\end{aligned}$$

kaikki ratkaisut.

3. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \theta\right)x - y, \\ \dot{y} &= x + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - \theta\right)y\end{aligned}$$

tasapainokohdat ja rajasyklit sekä tutki niiden stabiilisuutta ja piirrä faasikuvio parametrin  $\theta \in \mathbf{R}$  eri arvoilla.

4. Osoita, että  $x(t) = e^t$  toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x}(t) + q(t)x(t) = 0$$

jos ja vain jos  $1 + p(t) + q(t) \equiv 0$ . Ratkaise tämän nojalla

$$(t - 1)\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) + x(t) = 0.$$