

Algebralliset rakenteet II

Matematiikan ja tilastotieteen osasto, Helsingin yliopisto

Kevät 2020

Moodlekurssikoe 7.5.2020

- .
1. Mitkä seuraavista yhtälöistä pätevät jokaisessa renkaassa $(R, +, \cdot)$? Perustele vastauksesi huolellisesti
 - (a) $a^2 - ba = (a - b)a$ jokaiselle $a, b \in R$. (5 pistettä)
 - (b) $(a - 1)(a + 1) = a^2 - 1$ jokaiselle $a \in R$. (5 pistettä)
 - (c) $(a + b + 1)(a - b - 1) = a^2 - b^2 - a - 2b - 1$ jokaiselle $a, b \in R$. (5 pistettä)
 - (d) $2a \cdot 4b - ab = 7ab$ jokaiselle $a, b \in R$. (5 pistettä)
 2. Onko olemassa reaalilukujen joukon aliryhmää, joka on isomorfinen $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kanssa? Perustelu väitteesi huolellisesti.
 3. Olkoon $R(+, \cdot)$ vaihdannainen rengas, jossa on enemmän kuin 2 alkioita ja jossa jokaiselle alkion $a \in R \setminus \{0\}$ on olemassa sellainen yksikäsitteinen $b \in R$, että $2aba = a$. Osoita, että $R(+, \cdot)$ on kunta.
 4. Olkoon G ryhmä, jonka neutraalialkio on $\{e\}$, ja oletetaan, että H ja K ovat normaaleja ryhmän G aliryhmiä. Osoita, että jos $H \cap K = \{e\}$, niin G on isomorfinen ryhmän $G/H \times G/K$ aliryhmän kanssa.
 5. Selvitä polynomien $P = X^5 + 2X^3 + 3$ jaollisuutta
 - (a) polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_4[X]$,
 - (b) polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_3[X]$.