

Algebralliset rakenteet II kurssikoe 10.05.2017

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

1. Olkoon $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ varustettuna tavallisilla laskutoimituksilla $+$ ja \cdot .
 - (a) Osoita, että R on rengas,
 - (b) Osoita, että se on renkaan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ alirengas.
 - (c) Onko R renkaan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ideaali?
2. Olkoon G ja H ryhmiä ja $f: G \rightarrow H$ ryhmähomomorfismi. Osoita, että ydin $\text{Ker}(f)$ on G :n normaali aliryhmä.
3. Tarkastellaan polynomia $X^4 + 2X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.
 - (a) Onko polynomilla juuria?
 - (b) Onko se jaoton?
4. Olkoon $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, $H = (\mathbb{Z}, +)$ ja $J = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset G$. ja olkoon $f: G \rightarrow H$ määritelty kaavalla $f(n, m) = n - m$.
 - (a) Osoita, että f on homomorfismi.
 - (b) Osoita, että $G/J \cong H$ (ryhmien homomorfialausetta saa käyttää).
5. Onko polynomirenkaan $\mathbb{Z}_5[X]$ alkio $3X^2 - 1$ yksikkö? Jos ei, anna esimerkki renkaan $\mathbb{Z}_5[X]$ yksiköstä, joka ei ole 1.