

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
 Algebralliset rakenteet II  
 Kurssikoe 11.5.2018 (kesto 2 h 30 min)

1. Tutkitaan rengasta  $R = \{a, b, c, d\}$ , jolla on oheiset laskutoimitustaulut:

+	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$
$b$	$b$	$c$	$d$	$a$
$c$	$c$	$d$	$a$	$b$
$d$	$d$	$a$	$b$	$c$

·	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$a$	$a$	$a$
$b$	$a$	$b$	$c$	$d$
$c$	$a$	$c$	$a$	$c$
$d$	$a$	$d$	$c$	$b$

- a) Mikä on renkaan  $R$  ykkösalkio?
  - b) Onko rengas  $R$  kunta?
  - c) Ratkaise renkaassa  $R$  yhtälö  $x^2 - 3x + 1 = 0$ .
2. a) Onko olemassa homomorfismia  $f: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ , jolle  $f(1) = 1$ ?
  - b) Onko olemassa homomorfismia  $g: (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ , jolle  $g(1) = 1$ ?
  - c) Oletetaan, että  $h: G \rightarrow G'$  on ryhmien välinen homomorfismi. Osoita: Jos ryhmä  $G$  on syklinen, niin myös kuvajoukko  $\text{Im} h$  on syklinen.
3. Tarkastellaan neliön symmetriaryhmää  $D_4$ , jonka laskutoimitustaulukko on tämän paperin kääntöpuolella. Pidetään tunnettuna, että  $N = \{E, K_{180}\}$  on ryhmän  $D_4$  normaali aliryhmä.
    - a) Määritä tekijäryhmän  $D_4/N$  alkioita.
    - b) Millainen on tekijäryhmän  $D_4/N$  kertotaulu?
    - c) Mitkä ovat tekijäryhmän alkioiden kertaluvut?
4. a) Onko polynomi  $X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}_3[X]$  jaoton? Jos ei ole, esitä se jaottomien polynomien tulona.
  - b) Onko polynomi  $X^3 + X^2 - X - 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$  jaoton? Jos ei ole, esitä se jaottomien polynomien tulona.



	$E$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$E$	$E$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$K_{90^\circ}$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$E$	$P_4$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$K_{180^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$E$	$K_{90^\circ}$	$P_3$	$P_4$	$P_1$	$P_2$
$K_{270^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$E$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_1$
$P_1$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$E$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$
$P_2$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_1$	$K_{270^\circ}$	$E$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$
$P_3$	$P_3$	$P_4$	$P_1$	$P_2$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$E$	$K_{90^\circ}$
$P_4$	$P_4$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$K_{90^\circ}$	$K_{180^\circ}$	$K_{270^\circ}$	$E$