Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Algebra II
1. kurssikoe 20.10.2025

1. a) Olkoon

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 7 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_7.$$

Esitä σ erillisten syklien tulona. Esitä σ transpositioiden tulona. Laske $\mathrm{sgn}(\sigma)$.

b) Oletetaan, että $\alpha, \beta \in S_n$ ovat mitä tahansa permutaatioita. Osoita, että $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ on parillinen permutaatio.

2. Tarkastellaan tekijäryhmää $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$.

a) Osoita, että $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on joukkona ääretön, mutta jokaisen alkion kertaluku on äärellinen.

b) Osoita, että jokaisella $n \in \{2, 3, ...\}$ on olemassa ryhmän $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ aliryhmä, joka on isomorfinen ryhmän $(\mathbb{Z}_n, +)$ kanssa.

c) Onko ryhmällä $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ kanssa isomorfista aliryhmää.

3. a) Oletetaan, että G on ryhmä. Haluamme tietää täsmälleen, mitkä ryhmät voivat olla ryhmän G homomorfisia kuvia.
Oletetaan, että tunnemme kaikki ryhmän G normaalit aliryhmät. Selitä homomorfialauseen avulla yksityiskohtaisesti, miten tämä tieto auttaa vastaamaan y.o. kysymykseen.

[Ryhmä G' on ryhmän G *homomorfinen kuva*, jos on olemassa surjektiivinen homomorfismi $G \to G'$.]

b) Määritä ryhmän $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ homomorfiset kuvat.

4. a) Oletetaan, että G on ryhmä ja $|G| = p^n q$, missä p ja q ovat alkulukuja ja $p > q$. Osoita, että ryhmällä G on täsmälleen yksi aliryhmä, jonka indeksi on q, ja tämä aliryhmä on normaali.

b) Osoita esimerkin avulla, että a)-kohdan väite ei päde, jos ehto "$p > q$" korvataan ehdolla "$p \neq q$".

Department of Mathematics and Statistics
Algebra II
1st midterm exam 20.10.2025

1. a) Let

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 7 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_7.$$

Present σ as a product of disjoint cycles. Present σ as a product of transpositions. Calculate $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

b) Suppose that $\alpha, \beta \in S_n$ are any permutations. Prove that $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ is an even permutation.

2. Consider the quotient group (factor group) $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$.

a) Prove that $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ is an infinite set, but the order of every element of the group is finite.

b) Prove that for every $n \in \{2, 3, ...\}$ there exists a subgroup of $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, which is isomorphic with the group $(\mathbb{Z}_n, +)$.

c) Does the group $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ have a subgroup, which is isomorphic with $(\mathbb{Z}, +)$?

3. a) Suppose that G is a group and we ask the following question: exactly which groups can be homomorphic images of G.
Suppose that we know all normal subgroups of G. Using the homomorphism theorem (isomorphism theorem), explain in detail, how this information helps us to answer the above question.

[A group G' is a *homomorphic image* of G, if there exists a surjective homomorphism $G \to G'$.]

b) Determine the homomorphic images of the group $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.

4. a) Suppose that G is a group and $|G| = p^n q$, where p and q are prime numbers and $p > q$. Prove that the group G has exactly one subgroup with index q, and this subgroup is normal.

b) Prove by giving an example that the claim in item a) doesn't hold, if the condition "$p > q$" is replaced with the condition "$p \neq q$".