Matematiikan ja tilastotieteen osasto / HY
MAT21020 Vektorianalyysi II
Loppukoe 20.12.2023 klo 12.00–14.30

1. Laske integraali

$$\iiint_A f \, dx_1 dx_2 dx_3,$$

kun $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ on funktio $f(\bar{x}) = e^{x_1}x_3^2 - 3x_2^2$, missä $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, ja joukko A on suorakulmainen särmiö $[0, 2] \times [0, 1] \times [0, 3]$.

2. a) Olkoon $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$ vektorikenttä, jonka molemmat komponentit $F_j \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, ovat jatkuvasti derivoituvia funktioita. Miten määritellään F:n eksaktisuus? Esitä (ilman todistusta) yleinen välttämätön ehto eksaktisuudelle, joka perustuu kahden muuttujan funktion derivoimisjärjestyksen vaihdannaisuuteen (max. 2 pistettä).
b) Määrää vakio $\beta \in \mathbb{R}$ siten, että vektorikentästä $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = \left(e^{-y} - xy,\ 3\beta x^2 - xe^{-y}\right)$$

tulee eksakti. Etsi sen jälkeen jokin F:n potentiaali; tähän voit käyttää mitä tahansa luennoilla tai laskuharjoituksissa mainittua keinoa (max. 4 pistettä).

3. Olkoon $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vektorikenttä

$$F(x, y) = (2y^3 - e^{-3x}, 3e^{-y^2} - 2x^3).$$

Laske kentän F käyräintegraali

$$\int_{\partial D} F \cdot d\bar{s},$$

käyttäen Greenin kaavaa, kun D on kiekon $B(\bar{0}, 2)$ ja vasemman puolitason $\mathbb{R}^2_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ leikkaus.

4. Olkoon $G \subset \mathbb{R}^3$ kappale

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 < x < 2\,,\ -2 < y < 2\,,\ y^2 < z < 10\}.$$

Määritä vektorikentän $F(x, y, z) := (e^x, 3y, 3z + 2x)$ vuo ulospäin reunan ∂G läpi. (Gauss)