HY / Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Topologia IA
Kurssikoe 8.3.2024
Sallitut apuvälineet: kolmen A4:n verran muistiinpanoja, laskin

Kaikissa tehtävissä $\mathbb{R}^n$ on varustettu euklidisella metriikalla: kun $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Erityisesti kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ on $d(x, y) = |x - y|$.

1. Olkoon $E = C[0,1] = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ on jatkuva}\}$. Määritellään

$$\|f\| = |f(0)| + |f(1)| \qquad \text{kaikilla } f \in C[0,1].$$

Selvitä, mitkä normin ehdoista (N1)–(N3) kuvaus $f \mapsto \|f\| : C[0,1] \to [0, \infty)$ toteuttaa.

2. Olkoot A ja B avoimia joukkoja $\mathbb{R}$:ssä. Osoita, että karteesinen tulo

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ ja } y \in B\}$$

on avoin $\mathbb{R}^2$:ssa.

3. Selvitä, ovatko seuraavat $\mathbb{R}^2$:n osajoukot suljettuja:
(i) $A = \{(x, y) : x > y\}$,
(ii) $A = \{(x, y) : x \geq 0 \text{ ja } \sin x \leq e^y\}$.
(Kohdassa (ii) voit olettaa tunnetuksi, että funktiot $x \mapsto e^x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $x \mapsto x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia. Voit myös olettaa tunnetuksi, että kaikilla $a \in \mathbb{R}$ välit $[a, \infty)$ ja $(-\infty, a]$ ovat suljettuja $\mathbb{R}$:ssä.)

4. Olkoon $E = C[0,1]$ varustettuna metriikalla $d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$. Määritellään

$$A = \{f \in C[0,1] : f(x) > 0 \text{ kaikilla } x \in [0,1]\}.$$

Osoita, että

$$\bar{A} = \{f \in C[0,1] : f(x) \geq 0 \text{ kaikilla } x \in [0,1]\}.$$

5. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Osoita, että $\partial A = \emptyset$, jos ja vain jos A on sekä suljettu että avoin X:ssä.
(Suunnan "$\Leftarrow$" todistuksessa on järkevää tehdä vastaoletus, että on olemassa piste $x \in \partial A$, ja johtaa ristiriita.)

Kaikkia luentomonisteessa, Jussi Väisälän kirjassa Topologia I tai aiemmilla kursseilla osoitettuja tuloksia saa käyttää, ellei niitä erikseen pyydetä osoittamaan. Joitakin tarvittavia määritelmiä löytyy sivulta 2.