Vihje: Tässä pitäisi päästä pitkälle yksiulotteisen polynomifunktion integroimissäännöillä:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

[illegible]

Anna joko esimerkki alla kuvatusta objektista (ja perustele miksi se on esimerkki) tai perustele miksei tällaista objektia ole olemassa.

(1) Jatkuva kaksiulotteinen satunnaisvektori (X_1, X_2), jolle satunnaisluvun X_1 reunajakauma on diskreetti jakauma.
(2) Moniulotteinen normaalijakauma, joka ei ole jatkuva jakauma.
(3) Kaksiulotteinen normaalijakauma, jonka momentit generoiva funktio on

$$M(t_1, t_2) = e^{2t_1+3t_2+\frac{1}{2}(t_1^2+9t_2^2+6t_1t_2)}.$$

Eli, jos tällainen normaalijakauma on mielestäsi olemassa, kerro mitkä ovat sen odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi.

Tehtävä 4: Todistus

Olkoon $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ n-ulotteinen satunnaisvektori, jonka jakauma on n-ulotteinen standardinormaalijakauma: $Y \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id}_n)$. Määritellään kullakin $k = 1, ..., n$ satunnaisluku

$$X_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j.$$

(1) Osoita, että satunnaisvektori $(X_1, ..., X_n)$ on normaalijakautunut, ja laske sen odotusarvovektori ja osoita, että sen kovarianssimatriisi on $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{i,j=1}^n$, missä

$$\Sigma_{ij} = \min(i, j).$$

(2) Osoita, että kullakin $1 \leq k < m \leq n$, satunnaisluvut X_k ja $X_m - X_k$ ovat riippumattomat.

Vihjeitä: Ensimmäisessä kohdassa voi muistella moniulotteisen normaalijakauman määritelmää, sekä huomata, että $\mathbb{E}(X_k X_m) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^m \mathbb{E}(Y_j Y_l)$. Toisessa kohdassa yksi vaihtoehto on yrittää perustella miksi $(X_k, X_m - X_k)$ on normaalijakautunut satunnaisvektori sekä muistella milloin normaalijakautuneen satunnaisvektorin komponentit ovat riippumattomat. Vaihtoehtoinen lähestymistapa voi kulkea momentit generoivan funktion kautta.

Email address: `christian.webb@helsinki.fi`