TODENNÄKÖISYYSLASKENTA II B, 2023 – UUSINTAKOE (7.2.2024)

Kokeessa on sallittu käsin kirjoitettu muistilappu (yksi kaksipuolinen A4-liuska) sekä funktio- tai nelilaskin. Kukin **neljästä** alla olevasta tehtävästä on kuuden pisteen arvoinen, ja jos tehtävässä on useampi kohta, kukin kohta on saman arvoinen. Ensimmäisessä tehtävässä sinun ei tarvitse perustella vastaustasi, mutta muissa perustelut ovat välttämättömiä täysien pisteiden saamiselle. Viimeinen tehtävä on haastavampi ja kannattaa jättää viimeiseksi.

Onnea kokeeseen!

Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa (ei tarvitse perustella)?

(1) Jos $A \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu joukko, jonka pinta-ala $|A|$ on aidosti positiivinen: $|A| > 0$, niin $f : A \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{|A|}$$
on erään jatkuvan jakauman tiheysfunktio.

(2) Olkoon (X_1, X_2) on jatkuva 2-ulotteinen satunnaisvektori, jonka jakauman tiheysfunktio $f_{(X_1,X_2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio. Olkoon $F_{(X_1,X_2)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jakauman kertymäfunktio. Tällöin pätee
$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}F_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)$$
jokaisella $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

(3) Olkoon (X_1, X_2) jatkuva satunnaisvektori, ja f_{X_1} satunnaisluvun X_1 reunajakauman tiheysfunktio. Mikäli $x_1 \in \mathbb{R}$ toteuttaa $f_{X_1}(x_1) > 0$, on satunnaisluvun X_2 ehdollinen jakauma ehdolla $X_1 = x_1$ jatkuva jakauma.

(4) On olemassa normaalijakauma, jonka kovarianssimatriisi on
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5) Normaalijakauma, jonka kovarianssimatriisi on
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$
on jatkuva jakauma.

(6) Olkoon $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ normaalijakautunut kaksiulotteinen satunnaisvektori ja olkoon Σ aidosti positiividefiniitti. Tällöin X_1 on normaalijakautunut satunnaisluku.

Olkoon $f : [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$,
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{16}x_2^2.$$

(1) Osoita, että f on erään jatkuvan 2–ulotteisen jakauman tiheysfunktio.

(2) Olkoon (X_1, X_2) 2-ulotteinen jatkuva satunnaisvektori, jonka jakauman tiheysfunktio on f. Laske tämän satunnaisvektorin odotusarvovektori.