Tilastollinen päättely IIb

Kurssikoe 6.3.2024

Tentissä saa olla mukana ainoastaan kirjoitusvälineet.

1. (a) Tarkastellaan tilastollista mallia $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})$. Miten määritellään (ehdollisen jakauman käsitteeseen perustuen) parametrin $\boldsymbol{\theta}$ tyhjentävä tunnusluku?

   (b) Olkoon $y_1, \ldots, y_n$ riippumaton satunnaisotos jatkuvasta jakaumasta, jonka tiheysfunktio on

   $$f(y;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(1/y)^{\alpha+1}\exp(-\beta/y), \quad y > 0,$$

   jossa α ja β ovat positiivisia parametreja. Etsi kaksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku parametrille $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$.

2. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(0, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$. Onko hypoteesille $H_0 : \sigma^2 = 1$ vs. $H_1 : \sigma^2 > 1$ olemassa tasaisesti voimakkain testi. Perustele huolellisesti vastauksesi käyttämällä Neyman-Pearson apulausetta. Laadi kyseisenlainen testi, mikäli sellainen on olemassa. Mikä on testisuureen jakauma nollahypoteesin vallitessa?

3. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

   $$f(y;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(1/y)^{\alpha+1}\exp(-\beta/y), \quad y > 0,$$

   jossa α ja β ovat positiivisia parametreja. Oletetaan, että α on tunnettu. Johda uskottavuusosamäärän testi, Waldin testi ja pistemäärätesti nollahypoteesille $H_0 : \beta = \beta_0$ kaksisuuntaista vaihtoehtoa $H_1 : \beta \neq \beta_0$ vastaan.

4. (a) Olkoon $y_1, \ldots, y_n$ riippumaton satunnaisotos jakaumasta, jonka tiheysfunktio riippuu reaaliarvoisesta parametrista θ ja olkoon $Y_1, \ldots, Y_n$ havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat. Määrittele tarkasti parametrin θ luottamusväli luottamustasolla $1 - \alpha$ (tunnetaan myös $100(1-\alpha)\%$ luottamusvälinä).

   (b) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\perp\!\!\!\perp$. Oletetaan, että $\sigma^2 > 0$ on tuntematon. Johda $100(1-\alpha)\%$ luottamusväli parametrille μ.