Mitta ja Integraali

Matematiikan ja Tilastotieteen Osasto

Kurssikoe, 25.10.2023

Tentissä ei saa käyttää lisämateriaaleja tai laskimia

1. Olkoon
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x,\ 0 \le x \le 1\}.$$
Osoita ulkomitan määritelmää käyttäen, että $m_2(A) = 0$.

2. Olkoot A ja B avaruuden $\mathbb{R}^n$ mitallisia osajoukkoja joille $m_n(A \cap B) < \infty$. Osoita, että
$$m_n(A \cup B) = m_n(A) + m_n(B) - m_n(A \cap B).$$

3. Olkoot $A_i \subset [0, 1]$, $i = 1, \ldots, n$, mitallisia joukkoja, joille pätee, että jokainen $x \in [0, 1]$ kuuluu ainakin kolmeen eri joukkoon A_i. Osoita, että jollakin i pätee
$$m_1(A_i) \ge \frac{3}{n}.$$

4. Onko funktio
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x),\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0,\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$
mitallinen? Perustele vastauksesi.

5. Määritä raja–arvo
$$\lim_{k \to \infty} \int_0^k x^{-k} e^{x^2/k^2} \sin(x/k)\, dx.$$
Mikäli käytät ratkaisussa jotain raja–arvolausetta, muista perustella sen käyttö huolella.