Mitta ja Integraali

Matematiikan ja Tilastotieteen Osasto

Uusintakoe, 08.11.2023

Tentissä ei saa käyttää lisämateriaaleja tai laskimia

1. Olkoon
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 3x,\ -1 \leq x \leq 1\}.$$
Osoita ulkomitan määritelmää käyttäen, että $m_2(A) = 0$.

2. Osoita, että joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen jos ja vain jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa mitalliset joukot A ja B siten että $A \subset E \subset B$ ja $m(B \setminus A) < \varepsilon$.

3. Onko funktio
$$f(x) = \begin{cases} \cos(x),\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1,\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$
mitallinen? Perustele vastauksesi.

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mitallinen, ja määritellään
$$A_k = \{x \in \mathbb{R};\ 2^{k-1} < |f(x)| \leq 2^k\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
Osoita, että f on integroituva on yhtäpitävää sen kanssa että
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(A_k) < \infty.$$

5. Määritä raja–arvo
$$\lim_{k \to \infty} \int_1^k x^{-2} e^{x^2/k^2} \sin(x/k)\, dx.$$
Mikäli käytät ratkaisussa jotain raja–arvolausetta, muista perustella sen käyttö huolella.