

TENTTI 22.12.23 / KOMBINATORIIKKA (syksy 2023)

1. Kuinka moni luonnollisista luvuista $1, 2, 3, \dots, 1000$ on jaollinen jollakin luvuista $2, 3$ tai 5 ?

2. Olkoot h, k, n ei-negatiivisia kokonaislukuja joille pätee $k + h \leq n$. Osoita, että

$$\binom{n}{h} \binom{n-h}{k} = \binom{n}{h+k} \binom{h+k}{h}.$$

3. Etsi ratkaisu rekursioyhtälölle $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + 1$ alkuarvoilla $u_0 = 0$ and $u_1 = 0$.
[Vihje: joko sijoita $u_n = v_n + c$, missä c on vakio, tai sovelle generoivia funktioita.]

4. Kutsuilla on n vierasta, joille on katettu illallinen pyöreän pöydän ympärille. Tarkastelemme erilaisia istumajärjestyksiä. Kaksi istumajärjestystä ovat samanlaiset, jos kullakin vieralla on niissä molemmissa sama oikeanpuoleinen vierustoveri ja sama vasemmanpuoleinen vierustoveri; muussa tapauksessa istumajärjestykset ovat erilaiset.

(a) Määritä erilaisten istumajärjestysten lukumäärä.

(b) Oletamme, että n on parillinen ja puolet vieraista on naisia ja puolet miehiä. Määritä niiden erilaisten istumajärjestysten lukumäärä, joissa ei ole millään kohdalla kahta vierekkäistä naista.