

TENTTI 10.01.24 / KOMBINATORIIKKA (syksy 2023)

1. Kirjahyllyyn laitetaan kaksi matemaattikan, kolme tietotekniikan, neljä fyysiikan, yksi kemian ja kaksi biologian kirjaa. Kuinka monella tavalla kirjat voidaan järjestää samalle hyllylle niin, että saman aineen kirjat ovat peräkkäin (tarkkaa numeraalista lukuarvoa ei tarvitse laskea)?
2. Todista seuraavat binomikerroimia koskevat identiteetit ja keksi niille kombinatorinen tulkinta:
 - (i) $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$.
 - (ii) $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$.
3. Etsi ratkaisu rekursioyhtälölle $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + 1$ alkuarvoilla $u_0 = 0$ and $u_1 = 0$.
[Vihje: joko sijoita $u_n = v_n + c$, missä c on vakio, tai sovelta generoivia funktioita.]
4. Jokainen 3×3 -ruudukon pikkuruuduista on väritetty punaiseksi tai siniseksi. Kuinka monta väriyöstä on joissa ruudukko ei sisällä yhtään kokonaan punaista 2×2 -ruudukkoa (tarkkaa numeraalista lukuarvoa ei tarvitse laskea)?