

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Algebraaliset rakenteet II
Kurssikoe 8.5.2024 (kesto 2 h 30 min)

Taulukkokirjan, laskimen ja muiden apuvälineiden käyttö ei ole sallittua.
Muista perustella vastauksesi huolellisesti!

1. Tutkitaan rengasta $A = \{a, b, c, d\}$, jolla on oheiset laskutoimitustaulut:

$+$	a	b	c	d	\cdot	a	b	c	d
a	a	b	c	d	a	a	a	a	a
b	b	c	d	a	b	a	b	c	d
c	c	d	a	b	c	a	c	a	c
d	d	a	b	c	d	a	d	c	b

Mikä on renkaan A yksösalkio? Onko rengas A kunta?

b) Oletetaan, että R on rengas, jolla on alirengas S . Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

i) Jos R on kunta, myös S on kunta.

ii) Jos R on kokonaisalue, myös S on kokonaisalue.

a) Onko olemassa homomorfismia $f: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$, jolle $f(1) = 1$?

b) Onko olemassa homomorfismia $g: (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$, jolle $g(1) = 1$?

c) Osoita määritelmistä lähtien: Jos ryhmähomomorfismin $f: G \rightarrow H$ ydin on triviaali, t.s. $\text{Ker } f = \{e_G\}$, niin f on injektio.

d) Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ ja sen aliryhmää $H = \langle [4]_{12} \rangle$. Kirjoita tekijäryhmän \mathbb{Z}_{12}/H laskutoimitustaulu.

e) Olkoon G ryhmä ja N sen normaali aliryhmä. Osoita, että tekijäryhmä G/N on vaihdannainen, jos ja vain jos $aba^{-1}b^{-1} \in N$ kaikilla $a, b \in G$.

f) Etsi polynomien $P = X^3 + X + 2 \in \mathbb{Z}_3[X]$ juuret.

g) Onko polynomi $P \in \mathbb{Z}_3[X]$ jaoton? Jos ei ole, esitä se jaottomien polynomien tulona.

h) Anna esimerkki polynomista $Q \in \mathbb{R}[X]$, jolla ei ole juuria ja joka ei ole jaoton.